جمهورية السودان

وزارة التعليم العام

المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

بخت الرضا

التعليم الثانوي

الرياضيات المتخصصة

الكتاب الأول

$$ب = \begin{pmatrix} ٦ & -٨ & ١ \\ ٣ & ٠ & -٢ \\ ٠ & ٣ & ٤ \end{pmatrix} \quad ج = \begin{pmatrix} ٦ & -٨ & ١ \\ ٠ & ٣ & -٤ \\ ٣ & ٠ & -٢ \end{pmatrix}$$

الصف الثالث

جمهورية السودان

وزارة التعليم العام

المركز القومي للمناهج والبحث التربوي

بخت الرضا

الرياضيات

(الجزء الأول)

للصف الثالث الثانوي – الرياضيات المتخصصة

إعداد: لجنة بتكليف من المركز القومي للمناهج والبحث التربوي من الأساتذة:

الدكتور: عبد الغنى إبراهيم محمد	المركز القومي للمناهج والبحث التربوي
الأستاذ : علي محمد الجاك	المركز القومي للمناهج والبحث التربوي
الدكتور: محسن حسن عبد الله هاشم	جامعة الخرطوم– كلية العلوم الرياضية
الأستاذ : محمد الحسن طه محمد	جامعة أم درمان الإسلامية
شارك في التنقيح :الأستاذ :	
الدكتور : عبد الله محمود عبد المجيد	المركز القومي للمناهج والبحث التربوي
عز الدين عثمان آدم	التوجيه الفني – ولاية الخرطوم
مراجعة :	
الأستاذ : عبد السلام الشريف	مدير إدارة التدريب بوزارة التربية
الأستاذ : حسن عبد الغفور حسن	مدير إدارة التقويم التربوي بوزارة التربية
الإخراج الفني والتصميم :	
الأستاذ :إبراهيم الفاضل الطاهر	المركز القومي للمناهج
الجمع بالحاسوب:	
إشراقة فرح شريف:	المركز القومي للمناهج
رقية الريح محمد إسماعيل	المركز القومي للمناهج
أحمد عبد الرضي علي	المركز القومي للمناهج
تصميم الغلاف :	
مجدي محجوب فتح الرحمن	المركز القومي للمناهج

ISBN 978-99942-53-18-0 ردمك

الموضــــــوع	الصفحـة
❑ المقدمة	أ
الوحدة الأولى: الاستنتاج الرياضي ،التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين	١
❑ **مبدأ الاستنتاج الرياضي**	٣
❑ مبدأ العد	٩
❑ مضروب العدد الطبيعي وخصائصه	١٤
❑ التباديل	١٧
❑ التوافيق	٢٤
❑ نظرية ذات الحدين	٣٢
❑ **الوحدة الثانية: المصفوفات**	٤٥
❑ تمهيد	٤٧
❑ بعض الأنواع الخاصة من المصفوفات	٤٩
❑ تساوي المصفوفات	٥٣
❑ منقول المصفوفة	٥٥
❑ جمع المصفوفات	٥٨
❑ خواص جمع المصفوفات	٥٩

❑ طرح المصفوفات	٦٠
❑ ضرب المصفوفة بعدد ثابت	٦١
❑ خواص ضرب المصفوفة بعدد	٦١
❑ ضرب المصفوفات	٦٥
❑ بعض خواص ضرب المصفوفات	٧٤
❑ **الوحدة الثالثة** : **الكسور الجزئية**	٧٩
❑ تمهيد	٨١
❑ الحالة الأولى : عندما تكون معاملات المقام خطية (من الدرجة الأولى)	٨٢
❑ الحالة الثانية : عندما يكون أحد معاملات المقام خطياً متكرراً (أي مرفوع إلى قوة معينة)	٨٦
❑ الحالة الثالثة : إذا كان أحد معاملات المقام من الدرجة الثانية ولا يمكن تحليله	٨٩
❑ **الوحدة الرابعة** : **الاحتمالات**	٩٤
❑ مقدمة	٩٦
❑ التجربة العشوائية	٩٦
❑ فضاء العينة	٩٦
❑ الحادثة	١٠٠

❑ العمليات على الحوادث	١٠٢
❑ مسلمات نظرية الاحتمالات	١٠٨
❑ الاحتمالات المتساوية	١١٥
❑ قانون الاحتمال الثنائي (توزيع ذات الحدين)	١١٩
❑ قانون الاحتمال الكلي	١٢٢
❑ **الوحدة الخامسة : الإحصاء**	١٢٩
❑ مقدمة ونبذة تاريخية	١٣١
❑ مقاييس النزعة المركزية	١٣٣
❑ حساب الوسط الحسابي من جدول تكراري ذي فئات	١٤١
❑ الوسيط	١٤٧
❑ المنوال	١٥٥
❑ التشتت	١٦٢

المقدمـــة

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات ، والصلاة والسلام على أشرف خلق الله سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم وعلى آله واصحابه أجمعين .
أما بعد .

فاستكمالاً لمناهج المرحلة الثانوية ، يسعدنا أن نقدم لأبنائنا الطلاب كتاب الرياضيات للصف الثالث الثانوي الكتاب الأول (متخصصة) بعد تنقيحه وإجراء بعض التعديلات عليه في إطار خطة التطوير التربوي للتعليم الثانوي من جانب ، وتمشياً مع التطور الكبير الذي حدث في محتوى مادة الرياضيات في النصف الأخير من القرن العشرين من جانب آخر ، هذا التطور الذي شمل طريقة عرضها وأسلوبها ولغتها كذلك . ولم تتح الفرصة لمناهج المرحلة الثانوية في السودان لمواكبته طوال الفترة الماضية لذلك حاولنا أن يكون منهج الرياضيات مواكباً لذلك التطور.

يشمل هذا المقرر المفاهيم التي تستكمل البناء الرأسي للمحتوى المعرفي الذي يجب أن يلم به الطالب وهو على أعتاب مرحلة التعليم العالي أو ممارسة الحياة العملية والمشاركة الفاعلة في المجتمع .

لقد تم إعداد هذا الكتاب ليشمل الاستنتاج الرياضي ، التباديل والتوافيق وذات الحدين ، والمصفوفات ، الكسور الجزئية ، والاحتمالات والإحصاء .

لقد عرضت مادة الكتاب من خلال دروس تحتوي كل منها على فكرة واحدة في الغالب ، ويتوافر في كل درس عدد مناسب من الأمثلة والمسائل لتعميق التدريب في الصف ، أو تعطى على شكل واجب منزلي . وقد توخينا في هذا الكتاب ربط موضوعاته بموضوعات كتب الرياضيات للصفوف السابقة مع الاهتمام بالبرهان الرياضي للحقائق العلمية ومراعاة التوازن بين المفاهيم والمهارات آملين أن نكون قد وفقنا في ذلك كله مرحبين بكل نقد بناء من الموجهين والمعلمين والطلاب وأولياء الأمور لإثراء الكتاب وتطويره .

والله الموفق

المؤلفون

الوحدة الأولى

ن – ١

الاستنتاج الرياضي، التباديل والتوافيق ونظرية ذات الحدين

ن ٣

ق ل

ر ١

الوحدة الأولى

الأهداف :-

يتوقع بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون الطالب قادراً على أن :

١. يتعرف مبدأ الاستنتاج الرياضي ويستخدمه في برهان بعض القواعد والقوانين الرياضية المتعلقة بمجموعة الأعداد الطبيعية.
٢. يتعرف مبدأ العد وأن يستخدمه في المسائل التي تتطلب ذلك.
٣. يتعرف مفهوم مضروب العدد الطبيعي وخصائصه.
٤. يتعرف مفهوم التباديل وأن يطبقه في مسائل رياضية وحياتية.
٥. يتعرف مفهوم التوافيق وأن يطبقه في حل مسائل رياضية وحياتية.
٦. يحل معادلات تشتمل على مضروبات أو تباديل أو توافيق.
٧. يبرهن صحة مجموعة من المتطابقات تشتمل على مضروبات أو تباديل أو توافيق.
٨. يجد مفكوك ذات الحدين $(س + أ)^{ن}$
٩. يتعرف مفهوم الحد العام ومعامل الحد.
١٠. يستخدم مفهوم الحد العام في إيجاد الحد المشتمل على س المرفوعة لأس معين ، أو الحد أو الحدين الأوسطين.

(١ – ١) مبدأ الاستنتاج الرياضي :

عرف الإنسان منذ القدم الأعداد الطبيعية ١ ، ٢ ، ٣ ، ..... وتعامل معها عندما بدت حاجته لعد الأشياء المحيطة به . وإذا نظرنا مجموعة الأعداد الطبيعية ط = { ١ ، ٢ ، ٣ ، .... } نجد أنها تحتوي على العنصر ١ وتتولد هذه المجموعة بدءاً من هذا العنصر تبعاً للقاعدة الآتية :

لكل عنصر ن سبق توليده عنصر وحيد يسمى بالعنصر التالي للعنصر ن ، دعنا نرمز له بالرمز ن$^{+}$ ويعني ن + ١ .

واستخداماً لهذا الوصف نجد أن :

ط = { ١ ، ١$^{+}$ ، ١$^{++}$ ، ١$^{+++}$ ، ...... }

وباستبدال ١$^{+}$ بالعدد ٢ ، ١$^{++}$ بالعدد ٣ ، ... نجد أن :

ط = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ... }

فإذا افترضنا أن س ⊂ ط تحقق الخاصيتين :

(١) ١ ∈ س

(٢) م ∈ س ⇐ م$^{+}$ ∈ س

(*)

فإن س = ط

إن هذه الخاصيةهى أساس **مبدأ الاستنتاج الرياضي** الذي ينص على الآتي:

إذا كان ق (ن) جملة رياضية تعتمد على ن في صحتها وخطئها حيث ن ∈ ط وكان :

(١) ق (١) صحيحة

(٢) ق (ر) صحيحة ⇐ ق (ر$^{+}$) صحيحة ، ∀ ر ∈ ط .

فإن ق (ن) صحيحة لكل ن ∈ ط

إن الاستنتاج الرياضي يستخدم لبرهان الكثير من العبارات والقواعد الرياضية المتعلقة بمجموعة الأعداد الطبيعية. فإذا كانت ق (ن) قضية مفتوحة

متغيرها العدد الطبيعي ن ، فلكي نثبت أن مجموعة الحل لهذه القضية المفتوحة هي ط (أي لكي نثبت أن ق (ن) صحيحة لأي عدد طبيعي ن) نقوم بما يلي

(١) نتحقق من أن العبارة صحيحة عندما ن = ١
أي تحقق أن ق (١) قضية صائبة .

(٢) نثبت صحة الاقتضاء ق (ن) ⇐ ق (ن + ١) .
أي أنه إذا كانت ق (ن) صائبة عند ن فإنها تكون صائبة عند (ن + ١) .

والخطوتان معاً تعنيان أن ق (١) صحيحة وبالتالي ق(٢) صحيحة . وصحة ق (٢) تعني بدورها أن ق (٣) صحيحة وهكذا بلا توقف . أي أن ق (ن) صحيحة لكل ن ∈ ط.

مثال (١) :

اثبت صحة العلاقة :

$$١ + ٢ + ٣ + ... + ن = \frac{ن (ن + ١)}{٢}$$

الحل :

(١) في حالة ن = ١ نجد أن :

$$١ = \frac{١ \times ٢}{٢}$$ فالعلاقة صحيحة عند ن = ١

(٢) لنفرض صحة العلاقة عند ن = ر أي :

$$١ + ٢ + ٣ + ... + ر = \frac{ر (ر + ١)}{٢}$$ علاقة صحيحة

وبإضافة ر + ١ للطرفين نجد أن :

١ + ٢ + ٣ + ... + ر + (ر + ١) = $\frac{\text{ر (ر + ١)}}{\text{٢}}$ + (ر + ١)

أو

١ + ٢ +٣ + ... + ر + (ر + ١) = (ر + ١) ($\frac{\text{ر}}{\text{٢}}$ + ١)

= $\frac{\text{(ر + ١) (ر + ٢)}}{\text{٢}}$

وهذا يعني أن العلاقة صحيحة عند ن = ر + ١ ، ووفقاً لمبدإ الاستنتاج الرياضي تكون العلاقة صحيحة لكل ن ∈ ط .

مثال (٢) :

اثبت أن :

١ + ٣ + ٥ + ٧ + ... + (٢ ر – ١) = ر^{٢} حيث ن ∈ ط

الحل :

(١) عند ن = ١ يصبح الطرف الأيمن ١ .
والطرف الأيسر =١^{٢} = ١
أي أن العلاقة صحيحة عند ن = ١

(٢) لنفرض أن العلاقة صحيحة عند ن = ر ، أي لنفرض أن :
١ + ٣ + ٥ + ... + (٢ ر – ١) = ر^{٢}
بإضافة الحد (٢ر + ١) للطرفين
١ + ٣ + ٥ +... + (٢ر – ١) + (٢ر +١) = ر^{٢} + (٢ر +١)
أو :
١ + ٣ + ٥ +... + (٢ر + ١) = (ر + ١)^{٢}

لاحظ أن القاعدة المطلوب إثباتها تقول إن مجموع الأعداد الفردية الموجبة الأولى والتي عددها ن يساوي $ن^{٢}$ ، ومن السهل رؤية أن الناتج الأخير يحقق هذه القاعدة أي أن افتراضنا لصحة القاعدة عند ن = ر اقتضى صحتها عند ن = ر + ١

فالعلاقة إذن صحيحة مهما تكن ن ∈ ط .

مثال (٣) :

برهن باستخدام مبدإ الاستنتاج الرياضي أن :

$$\sum_{ر=١}^{ن} ر^{٢} = ١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + ... + ن^{٢} = \frac{١}{٦} ن (ن + ١) (٢ ن + ١)$$

الحل :

من الواضح أن القاعدة صحيحة عند ن = ١

حيث $١^{٢} = \frac{١}{٦} \times ١ (١ + ١) (٢ + ١) = ١$

ولنفرض أنها صحيحة عند ن = ر ، أي :

$$١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + ... + ر^{٢} = \frac{١}{٦} ر (ر + ١) (٢ ر + ١)$$

ولنستنتج من هذه العلاقة أن القاعدة صحيحة عند ن = (ر + ١) وذلك باضافة $(ر + ١)^{٢}$ للطرفين :

أي:

$$١^{٢} + ٢^{٢} + ٣^{٢} + .. + ر^{٢} + (ر + ١)^{٢} = \frac{١}{٦} ر (ن + ١) (٢ ر + ١) \ (ر + ١)^{٢}$$

$$= \frac{١}{٦}\,(\text{ر} + ١)\,[\,\text{ر}\,(٢\text{ر} + ١) + ٦\,(\text{ر} + ١)\,]$$

$$= \frac{١}{٦}\,(\text{ر} + ١)\,[\,٢\text{ر}^{٢} + ٧\text{ر} + ٦\,]$$

$$= \frac{١}{٦}\,(\text{ر} + ١)\,(\text{ر} + ٢)\,(٢\text{ر} + ٣)$$

وهكذا نجد أن :

$$\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}+١} \text{ر}^{٢} = \frac{١}{٦}\,(\text{ن} + ١)\,((\text{ن} + ١) + ١)\,(٢\,(\text{ن} + ١) + ١)$$

$$= \frac{١}{٦}\,(\text{ن} + ١)\,(\text{ن} + ٢)\,(٢\text{ن} + ٣)$$

وهذه هي العلاقة التي يطلب برهانها.

مثال (٤) :

برهن أنه $\forall$ ن $\in$ ط فإن $٥^{\text{ن}} - ٢^{\text{ن}}$ تقبل القسمة على ٣ أي :

$$\frac{٥^{\text{ن}} - ٢^{\text{ن}}}{٣} \in \text{ط}$$

الحل :

نختبر صحة العلاقة عند ن = ١

$$\frac{٥^{١} - ٢^{١}}{٣} = \frac{٥ - ٢}{٣} = \frac{٣}{٣} = ١ \in \text{ط}$$

$\therefore$ العلاقة صحيحة عند ن = ١

نفرض أنها صحيحة عند ن = ر

أي أن $\frac{٥^{ر} - ٢^{ر}}{٣} \in \text{ط}$ ، ولنثبت صحتها عند ن = (ر + ١) يجب أن نثبت أن :

$$\frac{٥^{ر+١} - ٢^{ر+١}}{٣} \in \text{ط} .$$

الآن ضع $\frac{٥^{ر} - ٢^{ر}}{٣} = \text{ك}$ $\therefore$ $٥^{ر} = ٣\text{ك} + ٢^{ر}$

حيث ك $\in$ ط إذن :

$$\frac{٥^{ر+١} - ٢^{ر+١}}{٣} = \frac{٥ \times ٥^{ر} - ٢ \times ٢^{ر}}{٣} = \frac{٥(٣\text{ك} + ٢^{ر}) - ٢ \times ٢^{ر}}{٣}$$

$$= \frac{١٥\text{ك} + ٢^{ر} \times ٥ - ٢^{ر} \times ٢}{٣}$$

$$= \frac{١٥\text{ك} + ٢^{ر}(٥ - ٢)}{٣} = \frac{١٥\text{ك} + ٢^{ر} \times ٣}{٣}$$

$$= \frac{١٥\text{ك}}{٣} + \frac{٢^{ر} \times ٣}{٣} = ٥\text{ك} + ٢^{ر}$$

وحيث أن ك $\in$ ط فإن ٥ ك $\in$ ط أيضاً (لأن ط مغلقة بالنسبة لعملية الضرب) .

وحيث أن ر $\in$ ط فإن $٢^{ر} \in$ ط

وبالتالي فإن ٥ ك + $٢^{ر} \in$ ط (لأن ط مغلقة بالنسبة لعملية الجمع)

وبالتالي فإن الطرف الايمن :

$$\frac{٥^{ر+١} - ٢^{ر+١}}{٣} \in \text{ط}$$

تمرين (١ – ١) ؟

مستخدماً مبدأ الاستنتاج الرياضي أثبت ما يلي ($\forall$ ن $\in$ ط)

(١) $١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + \ldots + ن^٣ = \frac{ن^٢ (ن + ١)^٢}{٤}$

(٢) $\frac{١}{١ \times ٢} + \frac{١}{٢ \times ٣} + \frac{١}{٣ \times ٤} + \ldots + \frac{١}{ن (ن + ١)} = \frac{ن}{ن + ١}$

(٣) $٢^١ + ٢^٢ + ٢^٣ + \ldots + ٢^ن = ٢^{ن+١} - ٢$

(٤) $\frac{١}{٣} + \frac{١}{٩} + \frac{١}{٢٧} + \ldots + \frac{١}{٣^ن} = \frac{١}{٢}\left(١ - \frac{١}{٣^ن}\right)$

(٥) $٢ + ٦ + ١٠ + \ldots + (٤ن - ٢) = ٢ن^٢$

(٦) $٢ + ٤ + ٦ + \ldots + ٢ن = ن (ن + ١)$

(٧) $١\times٢ + ٢\times٣ + ٣\times٤ + \ldots + ن (ن+١) = \frac{ن (ن + ١) (ن + ٢)}{٣}$

(٨) $٣ + ٥ + ٧ + \ldots + (٢ن + ١) = ن^٢ + ٢ن$

(٩) برهن أن $\frac{٦^ن - ٢^ن}{٤} \in$ ط

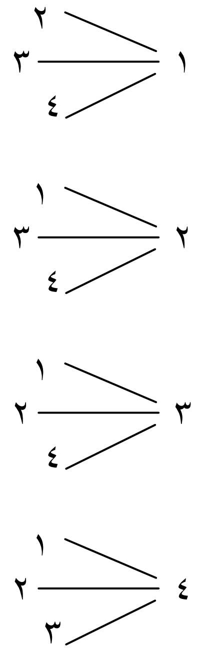
(١٠) $١^٣ + ٣^٣ + ٥^٣ + \ldots + (٢ن - ١)^٣ = ن^٢ (٢ن^٢ - ١)$

(١ – ٢) مبدأ العد :

العد من المهارات الأساسية التي يتعلمها الإنسان ويستخدمها في حياته اليومية ، وسنتعرض لبعض أساليب العد التي تقلل كمية العمل في المعالجة العددية للمجموعات التي تحتوي على عدد كبير من العناصر .

فإذا طلب منك أن تكوّن عدداً ذا رقمين يتم اختيارهما من الأرقام { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } بشرط ألاّ يتكرر أي رقم في تكوين العدد الواحد ، فكم عدداً يمكن أن تكوّن ؟

إحدى طرق حل هذه هو كتابة جميع الأعداد التي يمكن تكوينها ويمكن أن تستخدم لذلك طريقة الشجرة فترتب الارقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ على استقامه رأسية لتمثل خانة الآحاد ، ومن كل رقم تتفرع ثلاثة فروع تمثل الاختيارات الممكنة لخانة العشرات كما في الشكل (١ – ١) .



الشكل (١ – ١)

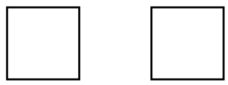
كل فرع من الشجرة يمثل عدداً ، ولذلك تكون الأعداد التي يمكن تكوينها هي :

٢١ ، ٣١ ، ٤١ ، ١٢ ، ٣٢ ، ٤٢ ، ١٣ ، ٢٣ ، ٤٣ ، ١٤ ، ٢٤ ، ٣٤

وعددها ١٢ عدداً .

وعلى الرغم من أن طريقة الشجرة تعطي جميع الاختيارات الممكنة إلاّ أنها غيرعملية وخاصة عندما يكون عدد الاختيارات الممكنة كبيراً جداً ، لذلك

نلجأ إلى استخدام طريقة للعد أكثر فاعلية لحساب عدد الخيارات الممكنة . فنرسم موقعين أحدهما يمثل خانة الآحاد والآخر يمثل خانة العشرات كما في الشكل:



خانة الآحاد   خانة العشرات

فإذا اخترت أحد الأرقام الأربعة لملء خانة الآحاد يتبقى ثلاثة أرقام مرشحة لملء موقع العشرات .

وبما أن هناك ٤ أرقام مرشحة لملء خانة الآحاد و ٣ أرقام لملء خانة العشرات فإن عدد الأعداد التي يمكن تكوينها يساوي ٤ × ٣ = ١٢ عدداً .

توضح هذه الطريقة قاعدة أساسية في طرق العد تسمى **مبدأ العد** وينص على الآتي :

إذا أمكننا إجراء عملية ما على خطوتين،وأجريت الخطوة الأولى بطرق عددها ن$_{١}$ والثانية بطرق عددها ن$_{٢}$ فيمكن إجراء هذه العملية بطرق عـــددها ن$_{١}$ × ن$_{٢}$ ويمكن تعميم مبدإ العد للعمليات التي يمكن إجراؤها على أكثر من مرحلتين كما يلي :

إذا أمكن إجراء عملية ما على مراحل عددها ك ، وكانـــت المرحلـــة الأولـــى تجرى بطرق عددها ن$_{١}$ ، والثانية تجرى بطرق عددها ن$_{٢}$ وهكـــذا المرحلـــة الأخيرة ك تجرى بطرق عددها ن$_{ك}$. فإن إجراء هذه العملية يتم بطرق عددها ن$_{١}$ × ن$_{٢}$ × .... × ن$_{ك}$

مثال (١) :

بكم طريقة يمكن اختيار رئيس وسكرتير للجنة مكونة من خمسة أشخاص بشرط ألاّ يشغل أحد الاشخاص المركزين معاً .

الحل :

يمكن اختيار الرئيس بطرق عددها ٥
أما السكرتير فيتم اختياره بطرق عددها ٤
فيكون عدد طرق اختيارهما معاً ٥ × ٤ = ٢٠ طريقة .

مثال (٢) :

حديقة بها سبعة أبواب . بكم طريقة يمكن لشخص الدخول من باب والخروج من باب مختلف .

الحل :

عدد طرق الدخول = ٧
عدد طرق الخروج = ٦
∴ عدد طرق الدخول والخروج = ٧ × ٦ = ٤٢ طريقة .

مثال (٣) :

كم لفظاً مختلفاً مكوناً من ثلاثة حروف متباينة يمكن تكوينه من الحروف الخمسة أ ، ب ، جـ ، د ، هـ .

الحل :

تلاحظ أن تكوين اللفظ يتطلب إجراء ثلاث عمليات على التتالي هي:
أولاً : اختيار الحرف الأول في اللفظ .
ثانياً : اختيار الحرف الثاني في اللفظ .
ثالثاً : اختيار الحرف الثالث في اللفظ .
فالعملية الأولى تتم بطرق عددها ٥ والثانية يمكن اجراؤها بطرق عددها ٤ والثالثة بطرق عددها ٣ .

∴ يمكن إجراء تكوين اللفظ بطرق مختلفة عددها
٥ × ٤ × ٣ = ٦٠ طريقة
أي أن هناك ٦٠ لفظاً .

مثال (٤) :
كم عدداً طبيعياً مكوناً من ثلاث منازل يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام { ٢ ، ٣ ، ٧ ، ٦ ، ٥ ، ١ } ليكون العدد أقل من ٥٠٠ ويسمح بتكرار الأرقام في العدد الواحد .

الحل :
حتى يكون العدد أقل من ٥٠٠ يجب أن تكون خانة المئات أقل من ٥ .
وبذلك يكون عدد الاختيارات الممكنة لخانة المئات = ٣ وبما أن التكرار مسموح به فإن عدد الاختيارات لكل من خانة العشرات وخانة الآحاد يساوي ٦ .
∴ عدد الأعداد المطلوبه = ٦ × ٦ × ٣ = ١٠٨ عدداً .

تمرين (١ – ٢)

(١) كم لفظاً مكوناً من حرفين يمكن تكوينه من مجموعة الحروف { س ، ص ، ع ، ل } إذا كان :
(أ) التكرار غير مسموح به .
(ب) التكرار مسموح به .
(٢) كم عدداً مكوناً من ٣ أرقام يمكن تكوينه باستخدام الأرقام ٢ ، ٣ ، ١ ، ٨ ، ٤ في حالة السماح بتكرار الرقم ، وفي حالة عدم السماح بتكرار الرقم .
(٣) بكم طريقة يمكن ترتيب خمسة كتب مختلفة على رف.
(٤) كم طريقة يمكن أن يتم بها اختيار رئيس ونائب رئيس وسكرتير لجنة مكونة من ٧ أشخاص علماً بأنه لا يسمح لشخص بأن يتولى مركزين معاً ؟

(٥) بكم طريقة يمكن تكوين لجنة مكونة من ٤ أعضاء بحيث يختار عضو واحد من المدرسين وعددهم ١٢ وعضوان من الطلاب وعددهم ٤٠ وعضو واحد من العمال وعددهم ٢٥ ؟

(٦) كم عدداً صحيحاً مكوناً من أربعة أرقام متباينة يمكن تكوينه من الأرقام من ١ إلى ٩ ؟

(٧) إذا علمت أن رقم أي هاتف في مدينة الدويم يتكون من ٥ أرقام . وكان رقم أي هاتف يبدأ بالرقم ٢ من اليسار . جد أكبر عدد من الخطوط يمكن لمقسّم الدويم أن يتحمله .

(٨) لدينا الأرقام الستة ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ ، ٩ :

أ. كم عدداً مكوناً من ثلاثة أرقام مختلفة يمكن تكوينه منها ؟

ب. كم منها أقل من ٥٠٠ ؟

ج. كم منها زوجياً ؟

د. كم منها مضاعفاً للخمسة وأكبر من ٦٠٠ ؟

(٩) كم لفظاً مكوناً من أربعة حروف مختلفة يمكن تكوينه من حروف كلمة " الخرطوم " ؟

أ. كم منها يبتدئ بحرف الألف ؟

ب. كم منها يبتدئ بحرف الألف وينتهي بحرف الطاء ؟

ج. كم منها يشمل حرف الخاء ؟

د. كم منها لايشمل حرف الراء والواو ؟

(١٠) نزل ٤ سياح بفندق يحتوي على ٧ حجرات خالية بكم طريقة يمكن توزيع هؤلاء السياح على هذه الحجرات بشرط أن يشغل كل منهم حجرة على انفراد.

✓(١ – ٣) مضروب العدد الطبيعي وخصائصه :

إن مفهوم التباديل يستلزم التعرض لمفهوم مضروب العدد الطبيعي وخصائصه . فإذا سئلت عن عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها خمسة اشخاص في خمسة مقاعد على خط مستقيم ستجيب حسب مبدأ العد بأنها تساوي ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ طريقة .

وبصورة عامة فإن عدد ترتيب ن من الاشياء في ن من الأماكن يساوي :

ن (ن – ١) (ن – ٢) ..... (٣) (٢) (١)

وحاصل الضرب هذا له أهمية في الرياضيات ويسمى **مضروب العدد ن**

ويرمز له بالرمز ن **!** أو |ن .

تعريف (١ – ١) :

> إذا كان ن عدداً طبيعياً فإن مضروب ن هو :
>
> |ن = ن (ن – ١) (ن – ٢) ..... (٣) (٢) (١)

من التعريف تلاحظ أن |ن = ن |ن – ١

= ن (ن – ١) |ن – ٢ ..... وهكذا

مثال (١) :

(أ) احسب |١ ، |٢ ، |٦

(ب) بسط $\frac{|٨}{|٥}$ ، $\frac{|ن}{|ن - ٢}$ (ن > ٢) ،

$\frac{|ن + ٢ \; |ن - ١}{(|ن)^٢}$ (ن > ١)

الحل :

(أ) |١ = ١

|٢ = ٢ × ١ = ٢

$$\lfloor\underline{٦} = ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٧٢٠$$

(ب) $$\frac{\lfloor\underline{٨}}{\lfloor\underline{٥}} = \frac{٨ \times ٧ \times ٦ \lfloor\underline{٥}}{\lfloor\underline{٥}} = ٨ \times ٧ \times ٦ = ٣٣٦$$

$$\frac{\lfloor\underline{ن}}{\lfloor\underline{ن - ٢}} = \frac{ن\,(ن - ١)\lfloor\underline{ن - ٢}}{\lfloor\underline{ن - ٢}} = ن\,(ن - ١)$$

$$\frac{\lfloor\underline{ن + ٢}\ \lfloor\underline{ن - ١}}{(\lfloor\underline{ن})^{٢}} = \frac{(ن + ٢)\,(ن + ١)\lfloor\underline{ن}\ \lfloor\underline{ن - ١}}{(\lfloor\underline{ن})^{٢}}$$

$$= \frac{(ن + ٢)\,(ن + ١)\lfloor\underline{ن - ١}}{\lfloor\underline{ن}}$$

$$= \frac{(ن + ٢)\,(ن + ١)\lfloor\underline{ن - ١}}{ن\lfloor\underline{ن - ١}} = \frac{(ن + ٢)\,(ن + ١)}{ن}$$

تمرين (١ – ٣) ؟

(١) أحسب:

(أ) $\lfloor\underline{٥}$ (ب) $\lfloor\underline{٤}$

(٢) بسط (أ) $\dfrac{\lfloor\underline{ن+٢}}{\lfloor\underline{ن}}$ (ب) $\dfrac{\lfloor\underline{ن}}{\lfloor\underline{ن - ٢}}$ (جـ) $\dfrac{\lfloor\underline{٩}}{\lfloor\underline{٧}}$

(٣) اثبت أن $\lfloor\underline{٨} = (١\times٣\times٥\times٧) \times ٢^{٤} \lfloor\underline{٤}$

(٤) اختصر:

(أ) $\dfrac{\underline{|٨}}{\underline{|٥}\ \underline{|٣}}$ (ب) $\dfrac{\underline{|٦}}{\underline{|٣}\ \underline{|٣}}$ (جـ) $\underline{|ن} - \underline{|ن - ١}$

(٥) أثبت أن :

(أ) $\dfrac{\underline{|٢ن}}{\underline{|ن}} = ٢^{ن} \left(١\times٣\times٥\times..\times(٢ن - ١) \right)$

(١ – ٤) التباديل :

إذا كان لدينا مجموعة من الأشياء فإن كل ترتيب يتم إجراؤه بأخذ بعض من هذه الأشياء أو جميعها يسمى **تبديلاً**.

فإذا كان لدينا مجموعة الأحرف {أ ، ب ، جـ ، د} مثلاً ، فإن بعض التباديل لعناصر هذه المجموعة مأخوذة اثنين في كل مرة هي :

أ ب ، ب أ ، أ جـ ، جـ أ ، د ب ، ب د ، ...

وبعض تباديل هذه المجموعة مأخوذة ثلاثة في كل مرة هي:أ ب جـ ، أجـ ب، أ د ب ، ...

تعريف (١ – ٢) :

> التبديلة هي كل مجموعة جزئية يمكن اختيارها من مجموعة تحتوي على عدة عناصر بأخذها كلها أو بعضها مع مراعاة ترتيب عناصر المجموعة الجزئية المختارة .

والسؤال هو كيف نحسب عدد هذه التباديل ؟

الشكل التالي يوضح عدد التباديل للأربع أحرف {أ ، ب ، جـ ، د} مأخوذة اثنين في كل مرة

أ ← ب (أ ، ب)
أ ← جـ (أ ، جـ)
أ ← د (أ ، د)

ب ← أ (ب ، أ)
ب ← جـ (ب ، جـ)
ب ← د (ب ، د)

ج ← أ (جـ ، أ)
ج ← ب (جـ ، ب)
ج ← د (جـ ، د)

د ← أ (د ، أ)
د ← ب (د ، ب)
د ← جـ (د ، جـ)

نلاحظ أن عدد التباديل الممكنة ١٢ تبديلاً

نستعمل الرمز $ل_{ر}^{ن}$ أو أحياناً ل (ن ، ر) ليعني عدد تباديل ن من الأشياء المتمايزة مأخوذة ر في كل مرة .

وهذا يكافئ عدد طرق ملء ر من المواقع من خلال ن من العناصر المتمايزة مع الاهتمام بترتيب المواقع .

فالموقع الأول يمكن شغله بطرق عددها يساوي ن

والموقع الثانى يمكن شغله بطرق عددها يساوي (ن − ١)

والموقع الثالث يمكن شغله بطرق عددها يساوي (ن − ٢)

والموقع الرابع يمكن شغله بطرق عددها يساوي (ن − ٣)

وهكذا الموقع ر يمكن شغله بطرق عددها يساوي (ن − ر + ١) .

وحسب مبدأ العد يكون عدد طرق شغل هذه المواقع هو :

$$ل_{ر}^{ن} = ن\,(ن - ١)\,(ن - ٢)\,\ldots\,(ن - ر + ١) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_} \; (١)$$

ويمكن تبسيط هذه الصيغة بضرب الطرف الأيسر للمعادلة (١) بالمقدار

$\dfrac{\lfloor \text{ن} - \text{ر}}{\lfloor \text{ن} - \text{ر}}$ فنحصل على :

$$\text{ل}^{\text{ن}}_{\text{ر}} = \frac{\text{ن}\,(\text{ن} - ١)\,(\text{ن} - ٢)\,..\,(\text{ن} - \text{ر} + ١)\,\lfloor \text{ن} - \text{ر}}{\lfloor \text{ن} - \text{ر}}$$

أي أن : $\text{ل}^{\text{ن}}_{\text{ر}} = \dfrac{\lfloor \text{ن}}{\lfloor \text{ن} - \text{ر}}$ **(٢)**

لكل عدد طبيعي ن ، ر بحيث ن > ر

وفي الحالة الخاصــــة ر = ن فإن $\text{ل}^{\text{ن}}_{\text{ن}} = \lfloor \text{ن}$ **(٣)**

الذي يعني عدد طرق ترتيب ن من الأشياء المتمايزة في ن من الأماكن كما عرفنا سابقاً .

وباستخدام العلاقة (٢) في الحالة الخاصة ر = ن نجد أن :

$$\text{ل}^{\text{ن}}_{\text{ن}} = \frac{\lfloor \text{ن}}{\lfloor \text{ن} - \text{ن}} = \frac{\lfloor \text{ن}}{\lfloor ٠} \quad (٤)$$

من (٣) ، (٤) نجد أن :

$$\text{ل}^{\text{ن}}_{\text{ن}} = \lfloor \text{ن} = \frac{\lfloor \text{ن}}{\lfloor ٠}$$

مما يتوجب تعريف مضروب الصفر بـــ $\lfloor ٠ = ١$

ومن ثم تصبح العلاقة (٢) صحيحة لكل قيم ن ≤ ر

مثال (١) :

احسب ${}^{٧}ل_{٣}$ ، ${}^{٨}ل_{٤}$ ، $\frac{{}^{٩}ل_{٢}}{٣!}$

الحل :

$${}^{٧}ل_{٣} = \frac{٧!}{(٧ - ٣)!} = \frac{٧!}{٤!} = ٧ \times ٦ \times ٥ = ٢١٠$$

$${}^{٨}ل_{٤} = \frac{٨!}{(٨ - ٤)!} = \frac{٨!}{٤!} = ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ = ١٦٨٠$$

$$\frac{{}^{٩}ل_{٢}}{٣!} = \frac{٩!}{٧!\; ٣!} = \frac{٩ \times ٨}{١ \times ٢ \times ٣} = \frac{٧٢}{٦} = ١٢$$

مثال (٢) :

كم كلمة رباعية يمكن تكوينها من الأحرف س ، ص ، ع ، ل ، م ، ن ، هـ شريطة عدم تكرار أي حرف في الكلمة وليس ضرورياً أن يكون للكلمة معنى ؟

الحل :

عدد الكلمات = ${}^{٧}ل_{٤}$

$$= \frac{٧!}{(٧ - ٤)!} = \frac{٧!}{٣!} = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ = ٨٤٠ \text{ كلمة}$$

مثال (٣) :

بكم طريقة مختلفة يمكن بها ملء ٦ أماكن خالية اثنين منها بالحروف وأربعة بالأرقام إذا كان لدينا ٤ حروف و ٥ أرقام .

الحل :

يمكن ملء المكانين بالحروف بطرق تساوي تباديل ٤ حروف مأخوذة اثنين اثنين في كل مرة وعددها ${}^{٤}\text{ل}_{٢}$ ويمكن ملء الأماكن الأربعة الباقية بالأرقام بطرق عددها ${}^{٥}\text{ل}_{٤}$ ، وكل منها يقترن بطرق ملء المكانين بالحروف

∴ عدد الطرق = ${}^{٤}\text{ل}_{٢} \times {}^{٥}\text{ل}_{٤}$

= ٤ × ٣ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ = ١٤٤٠ طريقة

مثال (٤) :

بكم طريقة يمكن لأربعة رجال وثلاث سيدات أن يجلسوا على ٧ كراسي في صف واحد بحيث :

(أ) تجلس كل سيدة بين رجلين ؟

(ب) يجلس الرجال سوياً والسيدات سوياً ؟

الحل :

لكي تجلس كل سيدة بين رجلين فإن على السيدات أن يتبادلن في الجلوس على الكراسي الثاني والرابع والسادس بطرق عددها ${}^{٣}\text{ل}_{٣}$ = $\underline{|٣}$

وعلى الرجال الجلوس على الكراسي الأربعة الباقية بطرق عددها ${}^{٤}\text{ل}_{٤}$ = $\underline{|٤}$

وحيث أن كل طريقة من طرق جلوس السيدات تقترن بطريقة من طرق جلوس الرجال .

∴ عدد الطرق الكلي = $\underline{|٣} \times \underline{|٤}$ = ١٤٤ طريقة

(ب) لكي يجلس الرجال والسيدات سوياً فإما أن تجلس السيدات في الكراسي الثلاثة الأولى والرجال في الأربعة التي تليها أو العكس .

∴ عدد الطرق الكلي = $\underline{|٣} \times \underline{|٤} \times ٢$ = ٢٨٨ طريقة

مثال (٥) :

جد قيمة (ن ∈ ط) إذا كان :

$$ل^{ن}_{٢} = ٧٢$$

الحل :

$$ل^{ن}_{٢} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ٢}} = \frac{ن\,(ن - ١)\,\underline{|ن - ٢}}{\underline{|ن - ٢}}$$

$$= ن\,(ن - ١) = ٧٢$$

$$\therefore ن^{٢} - ن - ٧٢ = ٠$$

$$(ن - ٩)\,(ن + ٨) = ٠$$

∴ أما ن = ٩ أو ن = − ٨ مرفوضة لأن ن ∈ ط

∴ ن = ٩

تمرين (١ – ٤)

(١) جد قيمة :

(أ) $^{٥}ل_{٣}$ (ب) $^{٩}ل_{٤}$ (جـ) $^{١٠}ل_{٦}$ (د) $\frac{^{١٢}ل_{٥}}{^{١٢}ل_{٣}}$

(٢) اثبت أن :

(أ) $٢ \times {}^{١٦}ل_{٣} = {}^{٨}ل_{٥}$

(٣) جد قيمة الرمز المجهول إذا كان :

(أ) $^{ن}ل_{٢} = ٣٠$ (ب) $^{ن}ل_{٤} = ١٨ \; ^{(ن-١)}ل_{٢}$

(د) $^{١٦}ل_{ر} = ٢٤٠$ (جـ) $^{ن}ل_{٣} = ١٢٠$

(٤) عبّر عن كل مما يأتي بالشكل $^{ن}ل_{ر}$

(أ) $١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨$ (ب) $٤ \times ٦ \times ٥$

(جـ) ٢١٠ (د) $(ن - ٢) (ن - ٣) (ن - ٤)$

(٥) جد عدد التباديل التي يمكن تكوينها من جميع حروف كلمة " الخرطوم.

(٦) بكم طريقة يمكن بها ترتيب ٤ كتب رياضيات و ٣ كتب فيزياء وكتابين كيمياء على رف بحيث تكون الكتب من كل مادة جنباً إلى جنب ؟

(٧) بكم طريقة يمكن لستة اشخاص أن يجلسوا في صف إذا أصر اثنان منهم الجلوس جنباً إلى جنب ؟

(٨) يوجد في مكتبة ١٠ كتب مختلفة في الرياضيات و ٧ كتب مختلفة في الفيزياء . بكم طريقة يمكن ترتيب ٦ كتب منها مكونة من ٤ كتب رياضيات وكتابين فيزياء على رف المكتبة بحيث تكون كتب الرياضيات مع بعضها وكتب الفيزياء مع بعضها.

✓ (١ – ٥) التـــوافيـــق :

تعلمت في الدرس السابق أن عدد تباديل الأحرف أ ، ب ، جـ مأخوذة اثنان في كل مرة يساوي ستة وهي أ ب ، أ جـ ، ب أ ، ب جـ ، جـ أ ، جـ ب وسنطرح الآن سؤالاً مختلفاً . كم عدد الطرق التى يمكن بها أن نختار حرفين من مجموعة الأحرف { أ ، ب ، جـ } ؟ يتضح من السؤال أن ترتيب الحروف غير مهم في عملية الاختيار ، وبذلك تكون الاختيارات هى { أ ، ب } ، { أ ، جـ } ، { ب ، جـ } وعددها يساوي ثلاثة .

إن كل اختيار من هذه الاختيارات يسمى توفيقاً وبصورة عامة نضع التعريف التالي :

تعريف (١ – ٣) :

التوفيقة هي كل مجموعة جزئية يمكن إختيارها من مجموعة تشمل عدة عناصر بأخذها كلها أو بعضها دون مراعاة لترتيب العناصر في المجموعة الجزئية المختارة .

ويرمز لعدد التوافيق بالرمز $^{ن}ق_{ر}$ (ويقــرأ ن قاف ر) أو بالرمز

$\binom{ن}{ر}$ (ويقرأ ن فوق ر)

مثال (١) :

اكتب توافيق الحروف أ ، ب ، جـ ، د مأخوذة ثلاثة ثلاثة في كل مرة .

الحل :

التوافيق هي : { أ ، ب ، جـ } ، { أ ، ب ، د } ، { أ ، جـ ، د } ، { ب ، جـ ، د } .

لاشتقاق قانون لحساب $^{ن}ق_{ر}$ تعلم بأنه حسب قاعدة التباديل فإن عدد طرق ترتيب ن من الأشياء مأخوذة ر في كل مرة يســاوي $^{ن}ل_{ر}$.

وهــذا يعني أنك تجري عملية الترتيب هذه على مرحلتين ، في المرحلة الأولى نختار مجموعة ر من الأشياء من بين ن من الأشياء ويتم بطرق عددها $^{ن}ق_{ر}$.

أما المرحلة الثانية فهي ترتيب هذه المجموعة الجزئية المختارة مأخــوذة ر في كل مرة ويتم ذلك بطرق عددها $\underline{|ر}$. إذن حسب مبدأ العدد يكون :

$$^{ن}ل_{ر} = {}^{ن}ق_{ر} \; \underline{|ر}$$

أي أن :

$$^{ن}ق_{ر} = \frac{^{ن}ل_{ر}}{\underline{|ر}}$$

وبتعويض $^{ن}ل_{ر} = \dfrac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ر}}$ نحصل على القاعدة :

$$ {}^{ن}ق_{ر} = \frac{ن!}{ر!\ (ن-ر)!} \qquad (ر \le ن) $$

(ولا معنى للرمز إذا كان ر > ن)

مثال (٢) :

بكم طريقة يمكن اختيار ثلاثة كتب من بين ٨ كتب ؟

الحل :

الطرق المختلفة تساوي عدد توافيق أشياء مختلفة عددها ٨ مأخوذة ثلاثة في كل مرة .

∴ عدد الطرق $= {}^{ن}ق_{ر} = {}^{٨}ق_{٣}$

$$ = \frac{٨ \times ٧ \times ٦}{١ \times ٢ \times ٣} = ٥٦ \text{ طريقة} $$

مثال (٣) :

اكتب ما يأتي في أبسط صورة

(أ) ${}^{١٠}ق_{٣}$ (ب) ${}^{ن}ق_{ن}$ (جـ) ${}^{ن}ق_{٠}$ (د) ${}^{ن}ق_{١}$

الحل :

(أ) $ {}^{١٠}ق_{٣} = \frac{١٠!}{(١٠-٣)!\ ٣!} = \frac{١٠!}{٧!\ ٣!} = \frac{١٠ \times ٩ \times ٨\ \ ٧!}{٧!\ \ ٣!} $

$$= \frac{١٠ \times ٩ \times ٨}{٣ \times ٢ \times ١} = ١٢٠$$

(ب) $$^{ن}ق_{ن} = \frac{ن!}{(ن-ن)!\;ن!} = \frac{ن!}{٠!\;ن!} = ١$$

(جـ) $$^{ن}ق_{٠} = \frac{ن!}{(ن-٠)!\;٠!} = \frac{ن!}{ن!\;٠!} = ١$$

(د) $$^{ن}ق_{١} = \frac{ن!}{(ن-١)!\;١!} = \frac{ن\;(ن-١)!}{(ن-١)!\;١!} = ن$$

مثال (٤) :

حل المعادلة :

$$^{ن}ق_{٢} = ٣٦$$

الحل :

$$^{ن}ق_{٢} = \frac{ن!}{(ن-٢)!\;٢!} = ٣٦$$

$$\therefore \frac{ن\;(ن-١)\;(ن-٢)!}{(ن-٢)!\;٢!} = ٣٦$$

$\therefore$ ن (ن − ١) = ٣٦ × ٢

$\therefore$ ن^{٢} − ن − ٧٢ = ٠

(ن − ٩) (ن + ٨) = ٠

$\therefore$ ن = ٩ أو ن = $^{-}$٨

وبما أن ن يجب أن تكون عدداً طبيعياً فإنه يوجد حل واحد هو ن = ٩

مثال (٥) :

اثبت أن :

$$\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}} = \text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ن} - \text{ر}}$$

الحل :

من التعريف :

$$\text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}} = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن} - \text{ر})! \; \text{ر}!}$$

$$\therefore \text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ن} - \text{ر}} = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن} - \text{ن} + \text{ر})! \; (\text{ن} - \text{ر})!} = \frac{\text{ن}!}{(\text{ن} - \text{ر})! \; \text{ر}!} = \text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ر}}$$

ويفيد هذا المثال في إمكانية ايجاد التوافيق بطرق مختصرة . فمثـــلاً

لايجاد $\text{ق}^{٩}_{٧}$ يمكن إجراء التالي :

$$\text{ق}^{٩}_{٧} = \text{ق}^{٩}_{٢} = \frac{٩ \times ٨}{١ \times ٢} = ٣٦$$

وأيضاً :

$${}^{٢٠}\text{ق}_{١٧} = {}^{٢٠}\text{ق}_{٣} = \frac{٢٠ \times ١٩ \times ١٨}{٣ \times ٢ \times ١} = ٢٠ \times ١٩ \times ٣ = ١١٤٠$$

مثال (٦) :

بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة مكونة من ٤ رجال و٣ سيدات يختارون من بين ٧ رجال و ٥ سيدات ؟

الحل :

يمكن اختيار ٤ رجال من ٧ بطرق مختلفة عددها ${}^{٧}\text{ق}_{٤}$ ويمكن اختيار ٣ سيدات من ٥ بطرق مختلفة عددها ${}^{٥}\text{ق}_{٣}$ وكل طريقة لاختيار السيدات تقترن بكل طريقة لاختيار الرجال في تكوين اللجنة .

$\therefore$ عدد الطرق = ${}^{٧}\text{ق}_{٤} \times {}^{٥}\text{ق}_{٣}$

$$= \frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤} \times \frac{٥ \times ٤ \times ٣}{٣ \times ٢ \times ١}$$

= ٣٥٠ طريقة

تمرين (١ – ٥)

(١) أحسب قيمة ما يأتي :

(أ) ${}^{١١}\text{ق}_{٥}$ (ب) ${}^{١٢}\text{ق}_{٧}$ (جـ) ${}^{٥}\text{ق}_{١}$ (د) ${}^{١٨}\text{ق}_{١٨}$

(هـ) ${}^{٧}\text{ق}_{٠}$

(٢) حل المعادلات :

(أ) ${}^{١٠}\text{ق}_{٣} = {}^{١٠}\text{ق}_{\text{ر}}$ (ب) ${}^{١٥}\text{ق}_{٤} = {}^{\text{ن}}\text{ق}_{٤}$

(٣) أثبت أن :

(أ) $(\text{ن} - \text{ر})\ {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} = \text{ن}\ {}^{\text{ن}-١}\text{ق}_{\text{ر}}$ (ب) ${}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}} = \dfrac{\text{ن} + ١}{\text{ن} - \text{ر} + ١}\ {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}$

(جـ) ${}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-١} = {}^{\text{ن}+١}\text{ق}_{\text{ر}}$

(د) $\dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+١}}{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}}} = \dfrac{\text{ن} - \text{ر}}{\text{ر} + ١}$

(٤) بكم طريقة يمكن بها اختيار ٥ كتب من ١٢ كتاب ؟

(٥) بكم طريقة يمكن انتخاب لجنة من ٥ أفراد من بين ١٠ أفراد بحيث يكون أكبرهم سناً وأصغرهم سناً عضوين في اللجنة .

(٦) يراد اختيار وفد من ٤ طلاب من بين ١٢ طالباً

أ. بكم طريقة يمكن الاختيار .

ب. بكم طريقة يمكن الاختيار إذا وجب إشراك طالبين معاً أو تركهما معاً .

(٧) مجموعة من طلاب الصف الثاني الثانوي مكونة من ٩ طلاب ومجموعة أخرى من طلاب الصف الثالث الثانوي مكونة من ٧ طلاب . كم عدد الطرق التي يمكن بها تكوين لجنة خماسية من هؤلاء الطلبة في كل من الحالات التالية :

أ. تتكون اللجنة من أي طلاب في المجموعتين .

ب. تتكون اللجنة من ٣ طلاب من الصف الثاني وطالبين من الصف الثالث .

ج. رئيس اللجنة والسكرتير من الصف الثالث وباقي الأعضاء من الصفين .

(٨) كم عدد الطرق التي يتم بها تكوين لجنة مكونة من معلمين اثنين وثلاثة طلاب يتم اختيارهم من بين ٨ معلمين و ١٠ طلاب ؟

(٩) رسمت خمس نقط على مستوى بحيث لا تقع أي ثلاث منها على خط مستقيم . كم قطعة مستقيمة يمكن رسمها إذا كانت كل قطعة تصل بين نقطتين من النقط المعطاه ؟

(١٠) فصل مختلط به ١٢ من البنين ، و ٨ من البنات . والمطلوب اختيار فريق مكون من ٥ أفراد من هذا الفصل . فما عدد طرق اختيار هذا الفريق في كل من الحالات التالية .

أ. إذا كان أعضاء الفريق من نوع واحد .

ب. إذا كان أعضاء الفريق يتكون من ٣ من البنين وبنتين.

(١ – ٦) نظرية ذات الحدين :

نظرية ذات الحدين نظرية رياضية مشهورة تتعامل مع المقادير الجبرية التي تتكون من حدين حاصل جمعهما مرفوع لقوة معينة ، وتكون على صورة (س + أ)^{ن} حيث س = الحد الأول ، أ = الحد الثاني و ن ∈ ط.

فمثلاً المقدار (٣ س^{٢} + ٥ ص^{٣})^{٥} فيه :

الحد الأول = ٣ س^{٢} ، الحد الثاني = ٥ ص^{٣} ، ن = ٥

والمقدار (٣ س – ٤ ص)^{٧} فيه :

الحد الأول = ٣ س ، الحد الثاني = –٤ ص ، ن = ٧

ولتسهيل الوصول إلى قاعدة رياضية لنظرية ذات الحدين سنتعامل مع المقادير التي على صورة (س + أ)^{ن} .

مفكوك (س + أ)^{ن} :

تأمل المتساويات التالية :

(س + أ)^{٢} = س^{٢} + ٢ أ س + أ^{٢} (١)

(س + أ)^{٣} = س^{٣} + ٣ أ س^{٢} + ٣ أ^{٢} س + أ^{٣} (٢)

(س + أ)^{٤} = س^{٤} + ٤ أ س^{٣} +٦ أ^{٢} س^{٢} +٤ أ^{٣} س + أ^{٤} (٣)

(س + أ)^{٥} = س^{٥} + ٥ أ س^{٤} + ١٠ أ^{٢} س^{٣} + ١٠ أ^{٣} س^{٢} + ٥أ^{٤} س + أ^{٥} (٤)

الطرف الأيسر من المتساويات الأربع يسمى مفكوك المقدار(س + أ)^{ن} حيث ن = ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ على التوالي .

ادرس المتساويات السابقة جيداً ثم أجب عن الاسئلة لكل مفكوك على حدة :

(١) ما العلاقة بين ما يلي وقيمة ن العددية ؟
- (أ) عدد حدود المفكوك .
- (ب) مجموع قوى س ، أ .
- (جـ) اكبر قوة لكل من س ، أ .
- (د) معامل الحد الثاني والحد قبل الأخير .

(٢) ماذا تلاحظ في قوى س وقوى أ ؟

(٣) ما قيمة معامل الحد الأول والحد الأخير ؟

(٤) أى الحدود تتساوى معاملاتها ؟

على ضوء الإجابة عن الأسئلة السابقة يمكن أن نستنتج الخواص الآتية لمفكوك $(س + أ)^{ن}$:

١. عدد حدود المفكوك يساوي (ن + ١) حداً .
٢. مجموع قوة س وقوة أ في كل حد يساوي ن .
٣. أكبر قوة لكل من س ، أ تساوى ن .
٤. معامل الحد الثاني والحد قبل الأخير يساوى ن .
٥. قوى س تبدأ بـــ ن في الحد الأول $(س^{ن})$ وتنقص بمقدار واحد حتى تصل إلى الصفر في الحد الأخيـــر $(أ^{ن} س^{٠})$.
٦. قوى أ تبدأ بـــ صفر في الحد الأول $(أ^{٠} س^{ن})$ وتزيد بمقدار واحد حتى تصل إلى ن في الحد الأخير $(أ^{ن})$.
٧. معاملات الحدود متماثلة ، بمعنى أن معامل الحد الأول يساوي معامل الحد الأخير ومعامل الحد الثاني يساوي معامل الحد قبل الأخير وهكذا .

من الخواص السابقة يمكن كتابة حدود مفكوك $(س + أ)^{٦}$ مثلاً ، على النحو التالي :

$(س + أ)^{٦} = س^{٦} + ٦ أ س^{٥} +.. أ^{٢} س^{٤} +.. أ^{٣} س^{٣} +.. أ^{٤} س^{٢} + ٦ أ^{٥} س + أ^{٦}$

وبصورة عامة يمكن كتابة مفكوك $(س + أ)^{ن}$ على النحو التالي :

$(س + أ)^{ن} = س^{ن} + ن أ س^{ن-١} + ... أ^{٢} س^{ن-٢} + ... +ن أ^{ن-١} س + أ^{ن}$

ولكن كيف نحسب معاملات الحدود الاخرى غير معاملات الحدود الأول ، الثاني ، الأخير وقبل الأخير .

نعلم أن :

$(س + أ)^{ن}$ = (س + أ) (س + أ) ...... (س + أ) ن مرة

للحصول على الحد الذى به $أ^{٢} س^{ن-٢}$ نختار أ ، أ من أي قوسين في الطرف الأيسر ثم نختار (عدد (ن – ٢)) س من الاقواس المتبقية ونضربها جميعها في بعضها . ويتم اختـــيار (عدد ٢) أ من (ن) قـــوس بـــ

^{ن}ق طريقة . إذن هنالك (عدد $^{ن}ق_{٢}$) $أ^{٢} س^{ن-٢}$ يمكن الحصول عليهـــا، $_{٢}$

عليـــه فإن معامـــل $أ^{٢} س^{ن-٢}$ هـــو $^{ن}ق_{٢}$. بالمثل معامل $أ^{٣} س^{ن-٣}$ هو $^{ن}ق_{٣}$

وذلك لأن طرق أختيار (عدد ٣) أ من الـــ (ن) قوس هى $^{ن}ق_{٣}$ وهكذا .

إذن بصورة عامـــة فإن معامـــل $أ^{ر} س^{ن-ر}$ فـــي مفكوك $(س + أ)^{ن}$ هو $^{ن}ق_{ر}$
وذلك من اختيار (عدد ر) أ من (ن) قوس .
على ضوء ذلك نستنتج نظرية ذات الحدين :

نظرية ذات الحدين :

إذا كان ن عدداً طبيعياً فإن :

$$(س + أ)^{ن} = {}^{ن}ق_{٠} س^{ن} + {}^{ن}ق_{١} س^{ن-١} أ^{١} + {}^{ن}ق_{٢} س^{ن-٢} أ^{٢} + .. + {}^{ن}ق_{ن} أ^{ن}$$

$$= \sum {}^{ن}ق_{ر} س^{ن-ر} أ^{ر}$$

لاحظ أن $^{ن}ق_{٠} = {}^{ن}ق_{ن} = ١$ و $^{ن}ق_{١} = {}^{ن}ق_{ن-١} = ن$

مثال (١) :

جد مفكوك $(س + ٢)^{٥}$

الحل :

$$(س + ٢)^{٥} = \sum_{ر=٠}^{٥} {}^{٥}ق_{ر} \, س^{٥-ر} \times ٢^{ر}$$

$$= {}^{٥}ق_{٠} \, س^{٥} + {}^{٥}ق_{١} \, س^{٤} \times ٢ + {}^{٥}ق_{٢} \, س^{٣} \times ٢^{٢} + {}^{٥}ق_{٣} \, س^{٢} \times ٢^{٣} +$$
$$ {}^{٥}ق_{٤} \, س \times ٢^{٤} + {}^{٥}ق_{٥} \times ٢^{٥}$$

$$= س^{٥} + ١٠ \, س^{٤} + ٤٠ \, س^{٣} + ٨٠ \, س^{٢} + ٨٠ \, س + ٣٢$$

* نشاط : جد مفكوك $(س - ٢)^{٥}$

مثال (٢) :

جد مفكوك $(٢ \, س^{٢} - ٣)^{٤}$

الحل :

$$(٢ \, س^{٢} - ٣)^{٤} =$$

$$= \sum_{ر=٠}^{٤} {}^{٤}ق_{ر} \, (٢س^{٢})^{٤-ر} \times (-٣)^{ر}$$

$$= {}^{٤}ق_{٠} \, (٢ \, س^{٢})^{٤} + {}^{٤}ق_{١} \, (٢ \, س^{٢})^{٣} \, (-٣)^{١} + {}^{٤}ق_{٢} \, (٢ \, س^{٢})^{٢} \, (-٣)^{٢}$$

$$+ {}^{٤}ق_{٣} \, (٢ \, س^{٢}) \, (-٣)^{٣} + {}^{٤}ق_{٤} \, (-٣)^{٤}$$

= ١٦ س^{٨} − ٩٦ س^{٦} + ٢١٦ س^{٤} − ٢١٦ س^{٢} + ٨١

إذا رتبت مفكوك (س + أ)^{ن} حسب قوة س التنازلية ستجد أن :

الحد الأول ح$_{١}$ = ^{ن}ق$_{٠}$ س^{ن} أ^{٠}

الحد الثاني ح$_{٢}$ = ^{ن}ق$_{١}$ س$^{ن-١}$ أ^{١}

الحد الثالث ح$_{٣}$ = ^{ن}ق$_{٢}$ س$^{ن-٢}$ أ^{٢}

الحد الذي ترتيبه ر = ح$_{ر}$ = ^{ن}ق$_{ر-١}$ س$^{ن-(ر-١)}$ أ$^{(ر-١)}$

الحد الذي ترتيبه (ر + ١) = ح$_{ر+١}$ = ^{ن}ق$_{ر}$ س$^{(ن-ر)}$ أ^{ر}

وهو ما يعرف **بالحد العام :**

الحد العام : ح$_{ر+١}$ = ^{ن}ق$_{ر}$ س$^{(ن-ر)}$ أ^{ر}

ر = ٠ ، ١ ، ٢ ، ..... ، ن

الحد الأوسط والحدان الأوسطان :

الحد الأوسط هو الحد الذي يقع في وسط الحدود بحيث تكون الحدود التي قبله تساوي عدد الحدود التي بعده وبما أن عدد حدود مفكوك القوس ذي القوة ن في ذات الحدين يساوي (ن + ١) حداً فإنه إذا كان ن عدداً زوجياً فإن عدد الحدود يكون فردياً وفي هذه الحالة يكون هنالك حد أوسط واحد يعطى بوضع ر = $\frac{ن}{٢}$

وإذا كانت ن عدداً فردياً فإن عدد الحدود يكون زوجياً وفي هذه الحالة يكون هنالك حدان أوسطان يعطيان بوضع ر = $\frac{ن - ١}{٢}$ ، $\frac{ن + ١}{٢}$

مثال (٣) :

جد:

(أ) الحد الأوسط في مفكوك $(س + \frac{١}{٢})^{١٠}$

(ب) الحدين الأوسطين في مفكوك $(٣ - س^{٢})^{١٥}$

الحل:

(أ) ن = ١٠ ∴ ر = $\frac{١٠}{٢} = ٥$

∴ الحد الأوسط $ح_{٦} = {}^{١٠}ق_{٥}\ س^{٥}\ (\frac{١}{٢})^{٥}$

$$= \frac{\underline{|١٠}}{\underline{|٥}\ \underline{|٥}} \left(\frac{س^{٥}}{٢}\right) = \frac{١٠×٩×٨×٧×٦}{١×٢×٣×٤×٥} × \frac{س^{٥}}{٣٢} = \frac{٦٣}{٨} س^{٥}$$

(ب) الحدان الأوسطان في مفكوك $(٣ - س^{٢})^{١٥}$ هما

ن = ١٥ ∴ ر = $\frac{١٥ - ١}{٢} = ٧$ ، ر = $\frac{١٥ + ١}{٢} = ٨$

$ح_{٧+١}$ ، $ح_{٨+١}$

$$ح_{٨} = {}^{١٥}ق_{٧}\ (٣)^{٨}\ (-س^{٢})^{٧} = - \frac{\underline{|١٥}}{\underline{|٧}\ \underline{|٨}}\ ٣^{٨}\ س^{١٤}$$

$$ح_{٩} = {}^{١٥}ق_{٨}\ (٣)^{٧}\ (-س^{٢})^{٨} = \frac{\underline{|١٥}}{\underline{|٧}\ \underline{|٨}}\ ٣^{٧}\ س^{١}$$

نشاط : (مثلث باسكال) :

ابتدع أحد الرياضيين واسمه (باسكال) اعداداً على شكل مثلث ، سمي باسمه، يمثل الصف ن فيه معامل حدود $(س + أ)^{ن}$. المثلث هو :

ن = ٠	١
ن = ١	١ ١
ن = ٢	١ ٢ ١
ن = ٣	١ ٣ ٣ ١
ن = ٤	١ ٤ ٦ ٤ ١
ن = ٥	١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١
ن = ٦	١ ٦ ١٥ ٢٠ ١٥ ٦ ١

- ما العلاقة بين معامل حدود كل مفكوك والذى قبله ؟
- وما علاقة ذلك بالنتيجة $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن-١}ق_{ر} + {}^{ن-١}ق_{ر-١}$ ؟
- كوّن مثلث باسكال إلى ن = ١٠ .

مثال (٤) :
جد الحد الخامس في مفكوك $(٢ س - ٣)^{٧}$ حسب قوى س التنازلية

الحل :

$$ح_{٥} = {}^{٧}ق_{٤}\,(٢ س)^{٣}\,(- ٣)^{٤}$$

$$= \frac{٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤} \times ٨ س^{٣} \times ٨١$$

$$= ٢٢٦٨٠ س^{٣}$$

مثال (٥) :
جد الحد المشتمل على $س^{٦}$ في مفكوك $(٢ س^{٣} - ١)^{٩}$

الحل :
نفرض أن رتبة الحد المطلوب هي ر + ١ فيكون :

$$ح_{ر+١} = {}^{٩}ق_{ر} \left(٢ س^{٣}\right)^{٩-ر} (-١)^{ر}$$

$$= (-١)^{ر} \; {}^{٩}ق_{ر} \; (٢)^{٩-ر} س^{٢٧-٣ر}$$

الحد الذي يشتمل على $س^{٦}$ هو الحد الذى يكون فيه أس س يساوي ٦

أي أن :

$٢٧ - ٣ر = ٦$

$\therefore ٣ر = ٢٧ - ٦ = ٢١$

$\therefore ر = ٧$

$\therefore$ الحد المطلوب هو الحد الثامن :

$$= (-١)^{٧} \; {}^{٩}ق_{٧} \; (٢)^{٢} س^{٦} = -١٤٤ س^{٦}$$

مثال (٦) :

جد الحد الخالي من س في مفكوك $\left(\frac{٢}{س^{٢}} + س\right)^{٦}$

الحل :

الحد الخالي من س هو الحد الذى يكون فيه أس س هو الصفر ، ولنفرض أن رتبته ر + ١ .

$$\therefore \quad ح_{ر+١} = {}^{٦}ق_{ر} \left(٢ س^{-٢}\right)^{٦-ر} (س)^{ر}$$

$$= {}^{٦}ق_{ر} \; (٢)^{٦-ر} \; س^{-١٢+٢ر+ر}$$

أس س يساوي الصفر يعني أن :

$-١٢ + ٣ر = ٠$

$\therefore$ ر = ٤

$\therefore$ الحد الخامس = $^{٦}ق_{٤} \, (٢)^{٢} \, س^{٠}$

$$= \frac{٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١} \times ٢^{٢} = ٦٠$$

تمرين (١ – ٥)

(١) جد مفكوك كل من المقادير التالية :

(أ) $(س + ١)^{٦}$ (ب) $(٢س + ص)^{٥}$

(جـ) $(س^{٢} + ٢أ)^{٦}$ (د) $\left(س - \frac{١}{س}\right)^{٤}$

(٢) جد الحد السابع في مفكوك $\left(س - \frac{٢}{٣}\right)^{٩}$

(٣) جد الحد الأوسط في مفكوك $(١ - س^{٢})^{٨}$

(٤) جد الحد الخالي من س في مفكوك $\left(\frac{١}{س^{٢}} - س\right)^{١٨}$

(٥) جد الحدين الأوسطين في مفكوك $\left(س + \frac{١}{س}\right)^{١١}$

(٦) جد الحدود الثلاثة الأولى والحد العاشر في مفكوك $\left(٣س + \frac{٢}{س}\right)^{١٢}$

(٧) جد معاملات القوى المطلوبة في كل مما يأتي :

(أ) $س^{٨}$ في مفكوك $(٢ - س)^{١١}$

(ب) $س^{٣}$ في مفكوك $\left(٢س - \frac{٣}{س}\right)^{١٣}$

(جـ) $س^{٢}$ في مفكوك $\left(٢س - \frac{١}{٢س}\right)^{١٢}$

(٨) جد رتب الحدود المشتملة على قوى س المعينة في كل مما يأتي :

(أ) $س^{٦}$ في مفكوك $(٢ س^{٢} - \frac{١}{٤ س^{٢}})^{١١}$

(ب) $س^{٦}$ في مفكوك $(٢ س - \frac{١}{س})$

(٩) جد الحد الخالي من س في كل مما يأتي :

(أ) $(س - \frac{٢}{س})^{١٠}$ (ب) $(٢ س^{٣} - \frac{١}{س})^{١٢}$

(جـ) $(٣ س - \frac{٥}{س^{٣}})^{٨}$ (د) $(٢ س^{٢} + \frac{١}{٣ س^{٢}})^{١٦}$

(١٠) مستخدماً نظرية ذات الحدين اثبت أن :

(أ) ${}^{ن}ق_{٠} + {}^{ن}ق_{١} + {}^{ن}ق_{٢} + ... + {}^{ن}ق_{ن} = ٢^{ن}$ $(\forall$ ن $\in$ ط$)$

(ب) ${}^{ن}ق_{٠} - {}^{ن}ق_{١} + {}^{ن}ق_{٢} .... (-١)^{ن}\ {}^{ن}ق_{ن} =$ صفر $(\forall$ ن $\in$ ط$)$

تمرين عام

(١) أحسب قيمة ن إذا كان ${}^{ن+١}ق_{٣} = {}^{ن}ل_{٢}$

(٢) إذا كان $\frac{\lfloor س}{\lfloor س - ٢} = ٣٠$ ، جد قيمة س

(٣) جد ${}^{٦}ل_{٢} \div {}^{٦}ق_{٢}$

(٤) جد الحد الخالي من س في مفكوك $\left(س^{٣} - \frac{١}{س^{٢}}\right)^{١٠}$

(٥) جد قيم س التي تحقق :

$${}^{٥}ق_{س} = {}^{٥}ق_{٩ - ٢س}$$

(٦) اكتب الحد العام في مفكوك $\left(س^{٢} - \frac{١}{س}\right)^{٦}$ ثم جد قيمة :

(أ) الحد الخامس

(ب) رتبة الحد الذي يشتمل على $س^{٦}$

(٧) بكم طريقة يمكن اختيار رئيس وسكرتير من بين ١٢ طالباً لإدارة لجنة ؟

(٨) اختصر : ${}^{ن}ق_{ر} \div {}^{ن-١}ق_{ر}$

(٩) جد قيمة س التي تحقق كلاً مما يأتي :

(أ) ${}^{س}ق_{٣} = {}^{س}ق_{٥}$

(ب) ${}^{س}ق_{٢} = ٥٥$

(١٠) بكم طريقة يمكننا اختيار ٥ لاعبين من بين ١١ لاعباً ؟ وبكم طريقة يمكننا اختيار ٥ لاعبين من بين ١١ لاعباً إذا كان هنالك لاعب معين يجب أن يكون دائماً بين هؤلاء الخمسة ؟

(١١) جد الحد الأوسط في مفكوك $\left(س٢ + \frac{١}{س^{٣}}\right)^{٨}$.

تذكر أن :

- لبرهان صحة الجملة الرياضية ق (ن) لكل ن ∈ ط
  (١)نثبت أن : ق (١) صحيحة.
  (٢)نفترض أنها صحيحة من أجل ن = ر ونثبت من ذلك صحتها من أجل ن = ر+١ تكون بعد ذلك الجملة ق (ن) صحيحة لكل ن ∈ ط

- إذا أمكن إجراء عملية ما على خطوتين ، وكان عدد طرق إجراء الخطوة الأولى $ن_١$ وعدد طرق إجراء الخطوة الثانية $ن_٢$ فإن عدد الطرق الممكنة لإجراء العملية = $ن_١ \times ن_٢$ طريقة

- $\underline{|ن} = ن \times (ن - ١)\ (ن - ٢)\ \dots \times ٣ \times ٢ \times ١$

- $^{ن}ل_{ن} = \underline{|ن}$ ، $^{ن}ل_{ر} = \dfrac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ر}}$ ، $^{ن}ل_{٠} = ١$

- $^{ن}ق_{ن} = ١$ ، $^{ن}ق_{ر} = \dfrac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ر}\ \underline{|ر}}$ ، $^{ن}ق_{٠} = ١$

➢ إذا كان ن $\in$ ط فإن :

$$(س+أ)^{ن} = {}^{ن}ق_{٠}\, س^{ن} + {}^{ن}ق_{١}\, س^{ن-١} أ + {}^{ن}ق_{٢}\, س^{ن-٢} أ^{٢} + \dots + {}^{ن}ق_{ن}\, أ^{ن}$$

$$= \sum_{ر=٠}^{ن} {}^{ن}ق_{ر}\, س^{ن-ر} أ^{ر}$$

الوحدة الثانية

$$\begin{pmatrix} ٢٥ & ٢١ \\ ٢٠ & ١٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix}$$

المصفوفات

الوحدة الثانية

الأهداف :-

يتوقع بعد تدريس هذه الوحدة أن يكون الطالب قادراً على أن :

١. يتعرف مفهوم المصفوفة وأبعادها وبعض الأنواع الخاصة لها.

٢. يتعرف شرط تساوي المصفوفتين ومنقول المصفوفة.

٣. يجمع ويطرح مصفوفتين لهما البعد نفسه.

٤. يضرب المصفوفة بعدد ثابت.

٥. يتعرف خواص جمع المصفوفتين وخواص ضرب المصفوفة بالعدد الثابت.

٦. يتعرف شرط ضرب مصفوفتين.

٧. يجد حاصل ضرب مصفوفتين.

٨. يكتب نظاماً من المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات.

٩. يتعرف بعض خواص ضرب المصفوفتين.

(٢) المصفوفات

✓ **(٢ – ١) تمهيد :**

إن تطور المجتمع الإنساني وما ترتب على ذلك من كثرة المعلومات وتنوعها استلزم البحث عن سبل أيسر لحفظ هذه المعلومات وتنظيمها . ومن الوسائل البسيطة التى استخدمت في ذلك المصفوفات .

ولقد لوحظت المصفوفات لأول مرة من قبل العالم كيلى (١٨٢١ – ١٨٩٥).ثم تطورت فكرتها لتصبح نظاماً رياضياً له أسسه وقواعده،وأصبح يستخدم في حل كثير من مشاكل الرياضيات وتطبيقاتها وفي علم الاقتصاد وعلم الاجتماع وغيره .

ولنفرض أن أحد مصانع تجميع التلفزيون ينتج ثلاثة أنواع ١٤ بوصة ، ٢٠ بوصة ، ٢٤ بوصة . وللمصنع فرعان أ ، ب . وكان عدد الأجهزة التى انتجها كل فرع من كل نوع خلال شهر ما ما يلي :

الفرع (أ) انتج ٦٥ من النوع الأول ، ٥٠ من النوع الثانى و ٤٥ من النوع الثالث .

الفرع (ب) انتج ٧٠ من النوع الأول ، ٥٥ من النوع الثانى و ٣٥ من النوع الثالث .

إن هذه المعلومات معروضة بهذه الصورة لاتساعد على تذكرها أو المقارنة بينها . غير أنه من الممكن عرض هذه المعلومات بصورة افضل واوضح في الجدول التالي:

	النوع الأول ١٤″	النوع الثاني ٢٠″	النوع الثالث ٢٤″
الفرع أ	٦٥	٥٠	٤٥
الفرع ب	٧٠	٥٥	٣٥

لاحظ أننا رتبنا المعلومات في الجدول السابق على شكل صفوف وأعمدة، صفين وثلاثة أعمدة .

فإذا اكتفينا بالأعداد المرتبة في الصفوف والأعمدة وأهملنا الكلام المميز بها فإننا نحصل على التنظيم التالي:

٦٥	٥٠	٤٥
٧٠	٥٥	٣٥

يسمى مثل هذا التنظيم العددى **مصفوفة** ، ويرمز للمصفوفة بأحد الحروف الابجدية وتكتب داخل قوسين من النوع [ ] فتصبح :

$$\begin{pmatrix} ٤٥ & ٥٠ & ٦٥ \\ ٣٥ & ٥٥ & ٧٠ \end{pmatrix}$$

والصورة هذه ما هى إلاّ تنظيم للمعلومات على شكل مستطيل من الأعداد يتضمن صفين وثلاثة أعمدة . إن أي تنظيم لمجموعة من الاعداد على شكل صفوف واعمدة مثل الصورة السابقة يسمى **مصفوفة أعداد** .

تعريف (٢ – ١) :

المصفوفة هي مجموعة من الأعداد مرتبة على شكل مستطيل مكــون من عــدد من الصفوف والأعمدة .

فإذا كانت مصفوفة ما مكونة من م صفاً ، ن عموداً فنقول إن المصفوفة من النوع **م × ن** . وإذا تساوى عدد الصفوف وعدد الأعمدة في مصفوفة ما فنسمي المصفوفة **مصفوفة مربعة** .

فمثلاً إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ & ٢ \\ ١ & ١^- & ٧ \end{pmatrix}$

فإن أ مصفوفة مكونة من صفين وثلاثة أعمدة يتكون الصف الأول من الاعداد ٢ ، ٣ ، ٥ بينما يتكون الصف الثاني من الأعداد ٧ ، –١ ، ١ ويتكون العمود الأول من الأعداد ٢ ، ٧ . ويتكون العمود الثاني من الأعداد ٣ ، –١ والعمود الثالث من الأعداد ٥ ، ١ .

تسمى الأعداد التي تتألف منها الصفوف والأعمدة في المصفوفة **عناصر المصفوفة** . فالعدد ٢ هو العنصر الذي يقع في الصف الأول والعمود الأول ويرمز له بالرمز $أ_{١١}$ والعدد ١ هو عنصر الصف الثاني والعمود الثالث

ويرمز له بالرمز أ$_{٣٢}$. وبصورة عامة يرمز لعنصر الصف هـ والعمود ى بالرمز أ$_{هى}$ ويقرأ (ألف هـ ، ى) حيث يدل الرمز هـ إلى ترتيب الصف والرمز ى إلى ترتيب العمود .

- كيف يرمز للعناصر ٣ ، ٧
- جد أ$_{٢٢}$ ، أ$_{٣١}$

وبشكل عام إذا كانت أ مصفوفة مكونة من م صفاً و ن عموداً فإننا نكتب المصفوفة على الشكل التالي :

$$\begin{pmatrix} \text{أ}_{\text{١ن}} & \cdots & \text{أ}_{٣١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{\text{٢ن}} & \cdots & \text{أ}_{٣٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{١٢} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{أ}_{\text{م ن}} & \cdots & \text{أ}_{\text{م٣}} & \text{أ}_{\text{م٢}} & \text{أ}_{\text{م١}} \end{pmatrix} = \text{أ}$$

ونقول إن أ مصفوفة من النوع م × ن أو بعدها م × ن . لاحظ أنه عند كتابة بُعْدِ مصفوفة ما يجب أن نذكر عدد الصفوف أولاً . فمثلاً إذا كانت ب مصفوفة ٢ × ٥ ، وجـ مصفوفة ٥ × ٢ فإن ب مصفوفه مكونة من صفين وخمسة أعمدة بينما تتكون المصفوفة جـ من خمسة صفوف وعمودين .

✓(٢ – ٢) بعض الأنواع الخاصة من المصفوفات :

(١) إذا كانت مصفوفة ما مكونة من صف واحد فإنها تسمى **مصفوفة صف** ، وإذا تكونت من عمود واحد فإنها تسمى **مصفوفة عمود** . وهذه المصفوفات المكونة من صف واحد أو عمود واحد تسمى **متجهات** فالمصفوفة $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \\ ٥- \end{bmatrix}$ متجه عمود .

والمصفوفة [١ $\bar{٣}$ ٤] متجه صف

(٢) تسمى المصفوفة التي جميع عناصرها ، أصفاراً **مصفوفة صفرية** فالمصفوفة

$$\text{ص} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$$

مصفوفة صفرية ٣ × ٤

(٣) إذا كانت المصفوفة مربعة بحيث أن $\text{أ}_{\text{هى}}$ = صفر ى ≠ هـ فإن المصفوفة تسمى **مصفوفة قطرية** ، قطرها الرئيس مكون من العناصر $\text{أ}_{\text{ىى}}$ ، مثلاً :

$$\text{المصفوفة} \quad \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٣ & ٠ \\ -١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix} \quad \text{مصفوفة قطرية}$$

(٤) إذا كانت و مصفوفة قطرية بحيث جميع عناصر القطر متساوية وتساوى الواحد فإن هذه المصفوفة تسمى **مصفوفة الوحدة** مثلاً :

$$\text{و} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$$

مصفوفة وحدة من النوع ٤ × ٤

مثال :

اكتب أبعاد كل من المصفوفات التالية :

أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ١- \end{pmatrix}$ ، **ب** = $\begin{pmatrix} ٦٣ & ١- \\ ٠ & ٢ \\ ٢- & ٦ \end{pmatrix}$

جـ = $\begin{bmatrix} ٠ \\ ٧ \\ ٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$ ، **د** = $\begin{bmatrix} ٣- & ٢ & ٥ & ٠ & ١ \end{bmatrix}$

الحل :

ملاحظات :

(١) عدد عناصر المصفوفة = عدد الصفوف × عدد الأعمـــدة . فـــإذا كانت لمصفوفة م صفاً و ن عموداً فإن عدد عناصر المصفوفة = م × ن = م ن عنصراً .

(٢) المصفوفة هي مجرد طريقة لعرض البيانات في تشكيل مستطيل يحتوي على صفوف وأعمدة .

لاحظ أن التشكيلات التالية ليست مصفوفات لأنها ليست تشكيلات مستطيلة .

$\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ & ٣ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} & ١١ & \\ ١٠ & ٧ & ٨ \\ & ٩ & \end{pmatrix}$

تمرين (٢ – ١)

(١) اكتب أبعاد كل من المصفوفات التالية :

$$\begin{pmatrix} ٣ & ٧ & ٤ & ٢ \\ -٢ & ٩ & ٠ & ١ \end{pmatrix} = \textbf{ب} \qquad \begin{pmatrix} -١ & ٥ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٦ & ٠ & ٤ \end{pmatrix} = \text{أ}$$

$$\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \textbf{د} \qquad \begin{pmatrix} ٢ \\ ١ \\ ٠ \\ ٣ \end{pmatrix} = \textbf{جـ}$$

$$\begin{pmatrix} -٤ & ٧ & ٢ & ١ \end{pmatrix} = \textbf{هـ}$$

(٢) إذا كانت $\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix} = \text{أ}$

$$\begin{pmatrix} ٧ & ١ \\ ٤ & ٠ \\ ٣ & -٢ \end{pmatrix} = \textbf{ب}$$

(أ) جد بعد كل من المصفوفتين أ ، **ب**

(ب) جد العناصر $\text{أ}_{١٢}$ ، $\text{أ}_{٢١}$ ، $\text{أ}_{٢٢}$ ، $\text{ب}_{١٣}$ ، $\text{ب}_{٢٢}$ ، $\text{ب}_{١١}$

(٣) اكتب مصفوفة معاملات المتغيرين س ، ص من المعادلتين

٢ س + ٥ ص = ٣

س – ٢ ص = ٦

(٢ – ٣) تساوي المصفوفات :

يمكن تقديم مفهوم تساوي المصفوفتين من خلال التعريف التالي :

تعريف (٢ – ٢) :

نقول إن المصفوفتين أ ، **ب** متساويتان إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان معاً :

(١) إذا كان أ ، **ب** لهما البعد نفسه أي أن عدد صفوف أ يساوي عدد صفوف **ب** ، وعدد أعمدة أ يساوي عدد أعمدة **ب** .

(٢) العناصر المتناظرة متساوية أي أن :

$أ_{هى} = ب_{هى}$ لجميع قيم هـ ، ى الممكنة .

إذا تحقق شرط التساوي نكتب أ = **ب**

والمثال التالي يوضح هذا التعريف .

مثال (١) :

إذا كان

$$أ = \begin{pmatrix} ٥ & ١ & ٣- \\ ٢ & ٣ & ١ \end{pmatrix} \qquad ب = \begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٠ \\ ٢- & ٦ \end{pmatrix}$$

$$جـ = \begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ١ \\ ٢- & ٦ \end{pmatrix}$$

فإن أ $\neq$ **ب** لأن بعديهما مختلفان

$ب \neq جـ$ لأن $ب_{٢٢} \neq جـ_{٢٢}$

ويستخدم تعريف تساوي المصفوفات في ايجاد بعض المجاهيل في عناصر مصفوفات متساوية .

مثال (٢) :

جد قيمة س إذا كان

$$\begin{pmatrix} س + ٣ & ٢ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}$$

الحل :

بما أن المصفوفتين متساويتان فإن عناصرهما المتناظرة متساوية، وعليه فإن:

$س + ٣ = ٥ \Leftarrow س = ٢$

مثال (٣) :

جد قيمة س إذا كان

$$\begin{pmatrix} س^{٢} & ٦ \\ ٤ & -٣ \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٦ \\ ٥ & -٣ \\ ٤ & ص \end{pmatrix}$$

الحل :

$س^{٢} = ٤ \Leftarrow س = \pm ٢$

تمرين (٢ – ٢)

جد قيمة كل من س ، ص ، ع إذا كان :

(١)
$$\begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٠ & ص + ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & س \\ ع & -٢ \end{pmatrix}$$

(٢)
$$\begin{pmatrix} ٨ \\ ع + ٢ \\ -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س^{٢} - ١ \\ ٥ \\ ص \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ص & ٣ع - ٢ & ١٥ \\ ١ & ٠ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ١٠ & ٣س \\ ١ & ٠ & ٤ \end{pmatrix}$$

(٤)
$$\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ع - ١ & س + ص \\ ٤ & س - ص \end{pmatrix}$$

(٢ – ٤) منقول المصفوفة :

إذا كانت ب مصفوفة من الدرجة م × ن فإن منقول المصفوفة ب عبارة عن مصفوفة من الدرجة ن × م صفوفها هي بالترتيب أعمدة المصفوفة ب ويرمز لها بالرمز $ب'$.

إذن يكون العنصر $ب_{هـ و}$ الواقع في المصفوفة ب عند تقاطع الصف ذي الرقم هـ مع العمود ذي الرقم و يصبح عنصراً في $ب'$ واقعاً عند تقاطع الصف ذي الرقم و مع العمود ذي الرقم هـ .

لذلك يمكن أن نضع $ب' = [ب'_{هـ و}]$

حيث $ب'_{هـ و} = ب_{و هـ}$ هـ = ١ ، ٢ ، .. ، ن
و = ١ ، ٢ ، .. ، م

مثال :
إذا كان

$$أ = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ -٩ & ٦ & ١ \end{pmatrix}$$

$$فإن\ أ' = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٦ & ٣ \\ -٩ & ٤ \end{pmatrix}$$

حيث أ من الدرجة ٢ × ٣ ، بينما أ' من الدرجة ٣ × ٢
لاحظ أن أ ≠ أ'

مثال :
جد س' إذا كان **س** = $\begin{pmatrix} -٧ & ٣ & ١ \\ ٠ & -١ & ٤ \\ ٥ & ٦ & ١٣ \end{pmatrix}$

الحل: **س'** $\begin{pmatrix} ١٣ & ٤ & ١ \\ ٦ & -١ & ٣ \\ ٥ & ٠ & -٧ \end{pmatrix}$

لاحظ أن س مربعة كذلك **س'** ومن درجة واحدة

مثال :

إذا كان أ =
$$\begin{pmatrix} ٣ & -١٠ & ٢ \\ ١ & -٤ & -١٠ \\ ١١ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$$

جد أ′

الحل :−

لاحظ في هذه الحالة أن أ = أ′

وفي هذه الحالة نقول أن أ مصفوفة متماثلة

تمرين (٢ −٣) ؟

جد المنقول لكل من المصفوفات التالية :

(١)
$$\begin{pmatrix} -٥ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$$

(٢)
$$\begin{pmatrix} ٧ & -١ & ٢ \\ -٥ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$$

(٣)
$$\begin{pmatrix} ١ & -٢ & ٧ \\ -١ & ٥ & ٤ \\ ٥ & ٧ & ٠ \end{pmatrix}$$

(٤)
$$\begin{pmatrix} \text{جاهـ} & \text{جتاهـ} \\ \text{جتاهـ} & -\text{جاهـ} \end{pmatrix}$$

✓ (٢ – ٥) جمع المصفوفات :

لتكن أ ، ب مصفوفتين لهما نفس البُعد ، أى أن لهما نفس العدد من الصفوف ونفس العدد من الأعمدة ولتكن كل منهما مصفوفة م × ن .
أي :

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{١٢} & \cdots & \text{أ}_{١ن} \\ \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٢٢} & \cdots & \text{أ}_{٢ن} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{أ}_{م١} & \text{أ}_{م٢} & \cdots & \text{أ}_{م ن} \end{pmatrix}$$

$$\textbf{ب} = \begin{pmatrix} \text{ب}_{١١} & \text{ب}_{١٢} & \cdots & \text{ب}_{١ن} \\ \text{ب}_{٢١} & \text{ب}_{٢٢} & \cdots & \text{ب}_{٢ن} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{ب}_{م١} & \text{ب}_{م٢} & \cdots & \text{ب}_{م ن} \end{pmatrix}$$

فإن مجموع **أ** ، **ب** ويكتب **أ** + **ب** هي المصفوفة التي نحصل عليها **بجمع العناصر المتناظرة** من المصفوفتين .

$$\textbf{أ} + \textbf{ب} = \begin{pmatrix} \text{أ}_{١١} + \text{ب}_{١١} & \text{أ}_{١٢} + \text{ب}_{١٢} & \cdots & \text{أ}_{١ن} + \text{ب}_{١ن} \\ \text{أ}_{٢١} + \text{ب}_{٢١} & \text{أ}_{٢٢} + \text{ب}_{٢٢} & \cdots & \text{أ}_{٢ن} + \text{ب}_{٢ن} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{أ}_{م١} + \text{ب}_{م١} & \text{أ}_{م٢} + \text{ب}_{م٢} & \cdots & \text{أ}_{م ن} + \text{ب}_{م ن} \end{pmatrix}$$

ينتج مما سبق أنه لكي يكون لمصفوفتين مجموع يجب أن تكونا من بعد واحد ، أى أن يكون لهما عدد الصفوف نفسه وعدد الاعمدة نفسها . وتكون المصفوفة الناتجة من نفس بعد المصفوفتين اللتين أجريت عليهما عملية الجمع .
نجد مثلاً :

$$\begin{pmatrix} ٣ & ٠ & -٢ \\ ١ & ٥ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & ٣ & -١ \\ ٤ & ٦ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & -٣ \\ ٥ & ١١ & ٥ \end{pmatrix}$$

مثال :

عين المصفوفة **س** التي تحقق ما يلي :

$$\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ -٦ & ٢ \end{pmatrix} = \textbf{س} + \begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ -٥ & ٤ \end{pmatrix}$$

الحل:

تلاحظ أولاً أن المصفوفة س من الشكل

$$\begin{pmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{pmatrix}$$

وأن:

-١ + $أ_{١١}$ = ٣ ⇐ $أ_{١١}$ = ٤

٢ + $أ_{٢١}$ = ٤ ⇐ $أ_{٢١}$ = ٢

٤ + $أ_{١٢}$ = ٢ ⇐ $أ_{١٢}$ = -٢

-٥ + $أ_{٢٢}$ = -٦ ⇐ $أ_{٢٢}$ = -١

$$\therefore \textbf{س} = \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -١ & -٢ \end{pmatrix}$$

✓ (٢ – ٦) خواص جمع المصفوفات :

نستنتج بسهولة العلاقة التى عرفنا بها جمع مصفوفتين ما يلي :

(١) جمع المصفوفات إبدالي ، أي

أ + ب = ب + أ لكل مصفوفتين أ ، ب من نفس البعد .

(٢) جمع المصفوفات تجميعي أي:

(أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) لكل ثلاث مصفوفات أ ، ب ، جـ من نفس البعد .

(٣) لجمع المصفوفات من النوع م × ن عنصر محايد جمعي هو المصفوفة الصفرية من النوع م × ن .

(٤) لكل مصفوفة أ من النوع م × ن نظير جمعي هو المصفوفة − أ من النوع م × ن حيث :

$$-\text{أ} = \begin{pmatrix} -\text{أ}_{١١} & -\text{أ}_{٢١} & \cdots & -\text{أ}_{١\text{ن}} \\ -\text{أ}_{١٢} & -\text{أ}_{٢٢} & \cdots & -\text{أ}_{٢\text{ن}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\text{أ}_{\text{م}١} & -\text{أ}_{\text{م}٢} & \cdots & -\text{أ}_{\text{م ن}} \end{pmatrix}$$

مما سبق نستطيع أن نقول إن مجموعة المصفوفات من النوع م × ن مزودة بعملية الجمع + زمرة إبدالية .

✓ (٢ − ٧) طرح المصفوفات :

وكذلك يمكن تعريف طرح المصفوفتين أ ، ب اللتين من النوع م × ن كما يلي :

$$\textbf{أ} - \textbf{ب} = \begin{pmatrix} \text{أ}_{١١} - \text{ب}_{١١} & \text{أ}_{٢١} - \text{ب}_{٢١} & \cdots & \text{أ}_{١\text{ن}} - \text{ب}_{١\text{ن}} \\ \text{أ}_{١٢} - \text{ب}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} - \text{ب}_{٢٢} & \cdots & \text{أ}_{٢\text{ن}} - \text{ب}_{١\text{ن}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{أ}_{\text{م}١} - \text{ب}_{\text{م}١} & \text{أ}_{\text{م}٢} - \text{ب}_{\text{م}٢} & \cdots & \text{أ}_{\text{م ن}} - \text{ب}_{\text{م ن}} \end{pmatrix}$$

أي أن المصفوفة الناتجة هى المصفوفة الناتجة من طرح **عناصر ب من عناصر أ المناظرة لها** مثلاً :

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٤- & ٥ \\ ١ & ٣ & ٢- \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٣ \\ ٢ & ١- & ١ \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٤- & ٢ \\ ١- & ٤ & ٣- \end{bmatrix}$$

(٢ – ٨) ضرب المصفوفة بعدد ثابت :

حاصل ضرب العدد ك بالمصفوفة أ ويكتب ك٠أ أو ك أ هو المصفوفة التي نحصل عليها بضرب **كل عنصر من أ بالعدد ك .**

أي : ك أ =
$$\begin{pmatrix} \text{ك أ}_{١١} & \text{ك أ}_{٢١} & \cdots & \text{ك أ}_{١ن} \\ \text{ك أ}_{١٢} & \text{ك أ}_{٢٢} & \cdots & \text{ك أ}_{٢ن} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{ك أ}_{م١} & \text{ك أ}_{م١} & \cdots & \text{ك أ}_{م ن} \end{pmatrix}$$

مثلاً :

$$٣ \begin{pmatrix} ٢ & -٤ & ٥ \\ ١ & ٣ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & -١٢ & ١٥ \\ ٣ & ٩ & -٦ \end{pmatrix}$$

(٢ – ٩) خواص ضرب المصفوفة بعدد :

إذا كانت أ ، **ب** مصفوفتين من نفس النوع ، ك ، ل أي عددين حقيقيين، فإن عملية ضرب المصفوفات بعدد تحقق خواص التوزيع التالية :

(١) ك (أ + ب) = ك أ + ك ب

(٢) (ك + ل) أ = ك أ + ل أ

(٣) ك (ل أ) = (ك ل) أ

اعط أمثلة تحقق صحة هذه الخواص .

مثال :

إذا كان

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -٥ & ٠ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix} \quad ، \quad \textbf{ب} = \begin{pmatrix} ٧ & -٢ \\ ٣ & ١ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix}$$

جد (١) **٢ أ + ب** (٢) **٣ أ – ٢ ب**

الحل : (١) ٢ أ + ب =

$$٢\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -٥ & ٠ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٧ & -٢ \\ ٣ & ١ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٤ & ٦ \\ -١٠ & ٠ \\ ٢ & ٨ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٧ & -٢ \\ ٣ & ١ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١١ & ٤ \\ -٧ & ١ \\ ٤ & ٥ \end{pmatrix}$$

(٢) ٣ أ – ٢ **ب** =

$$٣\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -٥ & ٠ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix} - ٢\begin{pmatrix} ٧ & -٢ \\ ٣ & ١ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٦ & ٩ \\ -١٥ & ٠ \\ ٣ & ١٢ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١٤ & -٤ \\ ٦ & ٢ \\ ٤ & -٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٨ & ١٣ \\ -٢١ & -٢ \\ -١ & ١٨ \end{pmatrix}$$

تمرين (٢ – ٤) ؟

(١) اجمع ما أمكن :

(أ) $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٠ \\ ١ & ٢ & -٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ٣ \\ -١ & ٤ & ٢ \end{pmatrix}$

(ب) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٠ \\ ٣ & ٢ & ١ \\ ٠ & ٣ & -١ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$

(جـ) $$\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{د} \end{pmatrix}$$

(د) $$\begin{pmatrix} -\text{ب} & -\text{أ} \\ -\text{د} & -\text{جـ} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{ب} & \text{أ} \\ \text{د} & \text{جـ} \end{pmatrix}$$

(٢) اجر العمليات المبينة إن أمكن :

(أ) $$\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٤- & ٣ \\ ٦ & ٢ \end{pmatrix}$$

(ب) $$\begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٢- \\ ١ & ٢ & ٢ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٢- & ١ & ٤ \\ ٠ & ٣ & ٣ \end{pmatrix}$$

(جـ) $$\begin{pmatrix} ٢ \\ ٤ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$$

(د) $$\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{جـ} & \text{ب} & \text{أ} \\ \text{و} & \text{هـ} & \text{د} \\ \text{ط} & \text{ح} & \text{ز} \end{pmatrix}$$

(هـ) $\begin{pmatrix} \text{٢ أ} & \text{٢ ب} \\ \text{٤ أ} & \text{أ + ب} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{–أ} & \text{– ٢ ب} \\ \text{ب} & \text{أ – ب} \end{pmatrix}$

(٣) إذا كان

$$\text{أ} = \begin{pmatrix} \text{١} & \text{٣} & \text{٢} \\ \text{٤} & \text{–١} & \text{٣} \\ \text{٢} & \text{١} & \text{٤} \\ \text{–٢} & \text{–٣} & \text{٠} \end{pmatrix} \text{، } \textbf{ب} = \begin{pmatrix} \text{٤} & \text{–٢} & \text{١} \\ \text{٢} & \text{–٣} & \text{٤} \\ \text{–٣} & \text{١} & \text{٢} \\ \text{٤} & \text{٤} & \text{–٧} \end{pmatrix}$$

جد العناصر الآتية للمجموع أ + ب

(أ) العنصر الموجود في الصف الثالث والعمود الثاني .

(ب) العنصر الموجود في الصف الرابع والعمود الأول

(ج) العنصر $\text{أ}_{١٣} + \text{ب}_{١٣}$

(٤) إذا علمت أن

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} \text{–٢} & \text{–٣} \\ \text{–١} & \text{٢} \\ \text{٠} & \text{٥} \end{bmatrix} \text{، } \textbf{ب} = \begin{pmatrix} \text{٣} & \text{١} \\ \text{–٢} & \text{٢} \\ \text{–٤} & \text{–٢} \end{pmatrix} \text{، } \textbf{جـ} = \begin{bmatrix} \text{–٢} & \text{–٣} \\ \text{١} & \text{٢} \\ \text{٠} & \text{٤} \end{bmatrix}$$

فاحسب :

(أ) ٢ أ + **ب** (ب) أ – ٣ **ب** (ج) (أ + **ب**) + **جـ**

(د) (أ – **ب**) + **جـ** (هـ) أ + (**ب** + **جـ**)

(٥) حل المعادلات المصفوفية الآتية :

(أ) س + $\begin{pmatrix} ١ & -٠ \\ ٠ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

(ب) س − $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$

(جـ) $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & -١ \end{pmatrix}$ − س $= \begin{pmatrix} ٤ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$

(د) $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ − س $= \begin{pmatrix} ٢ & ١ & ١ \end{pmatrix}$

(٢ – ١٠) ضرب المصفوفات :

عائلتان متجاورتان عائلة سعيد وعائلة هاشم فإذا كانت عائلة سعيد تستهلك يومياً رطلاً من السكر ورطلين من الحليب و١٠ ارغفة . فإنه يمكن كتابة هذه الكميات على شكل متجه صف كما يلي : [١ ٢ ١٠] .

فإذا كان ثمن رطل السكر ٨٠ ديناراً ورطل الحليب ٥٠ ديناراً وثمن الرغيفة ١ دينار . فإن هذه الاسعار يمكن كتابتها على شكل متجه عمود كما يلي:

$$\begin{pmatrix} ٨٠ \\ ٥٠ \\ ١ \end{pmatrix}$$

فلو أراد سعيد أن يحسب ما يدفعه يومياً ثمناً لهذه الأشياء فإنه سينتج ما يلى :

١ × ٨٠ + ٢ × ٥٠ + ١٠ × ١ = ١٩٠ ديناراً .

وهذه العملية يمكن كتابتها بالمصفوفات على الشكل التالي :

$$\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ١٠ \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} ٨٠ \\ ٥٠ \\ ١ \end{pmatrix} ١ \times ٨٠ + ٢ \times ٥٠ + ١٠ \times ١ = ١٩٠$$

لتعبر عن طريقة لضرب المصفوفات

وبالمثل إذا كان استهلاك عائلة هاشم رطلين من السكر وثلاثة أرطال حليب و١٥ رغيفة يومياً فإن ذلك تمثله المصفوفة التالية :

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ١٥ \end{bmatrix}$$

فإن ما يدفعه هاشم يومياً يمثل كما يلي :

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ١٥ \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ٨٠ \\ ٥٠ \\ ١ \end{pmatrix} = ٢ \times ٨٠ + ٣ \times ٥٠ + ١٥ \times ١ = ٣٢٥$$

إن المصفوفة التي تمثل استهلاك العائلتين هي:

$$\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١٠ \\ ٢ & ٣ & ١٥ \end{pmatrix}$$

وان ما تدفعه العائلتان يمكن ايجاده كما يلى :

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{سكر} & \text{حليب} & \text{رغيف} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{عائلة سعيد} \\ \text{عائلة هاشم} \end{array} & \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١٠ \\ ٢ & ٣ & ١٥ \end{pmatrix} \end{array} \underset{\text{الأسعار}}{\begin{pmatrix} ٨٠ \\ ٥٠ \\ ١ \end{pmatrix}} = \underset{\text{المصروف اليومي}}{\begin{pmatrix} ١٩٠ \\ ٣٢٥ \end{pmatrix}}$$

يبين هذا المثال مبدأ **ضرب المصفوفات** . فعند ضرب عناصر الصف الأول بالمصفوفة الثانية وجمع نواتج الضرب – فإن العدد الناتج يكون عنصر الصف الأول والعمود الأول بالمصفوفة الناتجة ، وهكذا . لذلك يجب ملاحظة أنه كى نستطيع ضرب مصفوفتين يجب أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية .

ومن هذا المثال نستطيع كتابة التعريف التالي لضرب المصفوفات .

تعريف (٢ – ٣) :

إذا كانت أ مصفوفة م × ن وكانت **ب** مصفوفة ن × ل . فإنه يمكن ضرب أ في المصفوفة ب للحصول على مصفوفة ثالثة جـ من النوع م × ل عناصرها جـ $_{هـ ى}$ = مجموع نواتج ضرب عناصر الصف هـ من أ في نظيراتها من عناصر العمود ى في ب .

من المثال السابق والتعريف نلاحظ ونستنتج ما يلى :

(١) لكى يكون حاصل ضرب المصفوفتين أ ، **ب** معرفاً يجب أن يكون عدد اعمدة أ يساوي عدد صفوف **ب** .

(٢) إذا كان أ مصفوفة من النوع م × ن و **ب** مصفوفة من النوع ن × ل فإن حاصل ضربهما هو المصفوفة أ ب وتكون من النوع م × ل . أي بُعد المصفوفة **أ ب** يتحدد تماماً من عدد صفوف أ وعدد أعمدة **ب.**

(٣) إذا كان أ ، **ب** مصفوفتين مربعتين م × م فإن كلاً من **أ ب** ، **ب أ** مصفوفة مربعة من النوع م × م . وبصفة خاصة إذا كان أ = ب فستكتب أ أ بالصورة أ^{٢} .

(٤) ليس من الضروري أن يكون **أ ب** مساوياً **ب** أ فقد يكون **أ ب** معرفاً ولكن **ب** أ غير معرف كأن تكون أ مثلاً مصفوفة ٢ × ٤ و **ب**

مصفوفة ٤ × ١ فإن أ ب معرف ولكن ب أ غير معرف . حتى وان كان **أ ب** ، **ب أ** معرفتين فليس بالضرورة أنهما متساويتان . فمثلاً إذا كان أ مصفوفة ٢ × ٤ و **ب** بمصفوفة ٤ × ٢ فإن **أ ب** مصفوفة ٢ × ٢ بينما **ب** أ مصفوفة ٤ × ٤ .

مثال : إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٤ \\ ٢ & ٥ & ١ \end{pmatrix}$ ، **ب** = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$

جد **أ ب** ، **ب أ**

الحل :

بما أن عدد الأعمدة في أ = عدد الصفوف في **ب** فإننا نستطيع ضرب المصفوفة أ في المصفوفة **ب** ويكون الناتج مصفوفة ٢ × ٢

نفرض أن **جـ** = $\begin{pmatrix} جـ_{٢١} & جـ_{١١} \\ جـ_{٢٢} & جـ_{١٢} \end{pmatrix}$ = **أ ب**

باستخدام التعريف فإن :

$جـ_{١١}$ = مجموع حاصل ضرب عناصر الصف الأول ($ص_{١}$) من أ في نظائرها من عناصر العمود الأول ($ع_{١}$) من ب .

$$[\,٣ \quad ٢ \quad ٤\,] \begin{bmatrix} ٥ \\ ٢ \\ ١ \end{bmatrix} = ٤ \times ٥ + ٢ \times ٢ + ٣ \times ١ = ٢٧$$

$جـ_{١٢}$ = مجموع حاصل ضرب $ص_{٢}$ من أ في عناصر $ع_{١}$ من ب

$$١٧ = ١ \times ٢ + ٢ \times ٥ + ٥ \times ١ = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٢ \\ ١ \end{pmatrix} [\; ٢ \quad ٥ \quad ١ \;]$$

$$٢٦ = \begin{pmatrix} ٣ \\ ١ \\ ٤ \end{pmatrix} [\; ٣ \quad ٢ \quad ٤ \;] = $$ وبالمثل **ج** $_{٢١}$

$$١٦ = \begin{pmatrix} ٣ \\ ١ \\ ٤ \end{pmatrix} [\; ٢ \quad ٥ \quad ١ \;] = $$ **ج** $_{٢٢}$

وعليه فإن **أ ب** = $\begin{pmatrix} ٢٦ & ٢٧ \\ ١٦ & ١٧ \end{pmatrix}$

الآن **ب** أ معرفة أيضاً لأن الأعمدة في **ب** يساوي عدد الصفوف في أ

إذن **ب** أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٤ \\ ٢ & ٥ & ١ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} (٢ \times ٣) + (٣ \times ٥) & (٥ \times ٣) + (٢ \times ٥) & (١ \times ٣) + (٤ \times ٥) \\ (٢ \times ١) + (٣ \times ٢) & (٥ \times ١) + (٢ \times ٢) & (١ \times ١) + (٤ \times ٢) \\ (٢ \times ٤) + (٣ \times ١) & (٥ \times ٤) + (٢ \times ١) & (١ \times ٤) + (٤ \times ١) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ٢١ & ٢٥ & ٢٣ \\ ٨ & ٩ & ٩ \\ ١١ & ٢٢ & ٨ \end{pmatrix}$$

مثال :

إذا كان **س** = $\begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ ، **ص** = $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٢ \end{pmatrix}$

فجد إن أمكن (١) **س ص** (٢) **ص س** (٣) **س**^{٢}

الحل :

(١) بما أن عدد أعمدة س يساوي عدد صفوف ص فإن س ص يمكن ايجادها وتكون :

$$\begin{bmatrix} ٦ & -٣ & -٤ \\ ١٢ & ٥ & ١٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$$

(٢) ص س لايمكن إيجادها لأن عدد أعمدة ص لا يساوي عدد صفوف س .

(٣) **س**^{٢} = **س س** = $\begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -٣ & ٢ \\ ٥ & ٤ \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -٢١ & -٨ \\ ١٣ & ٢٨ \end{bmatrix} =$$

مثال :

اكتب المعادلات الآتية باستخدام المصفوفات

س + ٢ ص = ٩

٣ س – ٢ ص = ١١

الحل :

لاحظ أنه من الممكن كتابة الطرف الأيمن في المعادلتين باستخدام حاصل ضرب المصفوفات على الصورة :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$$

بينما يمكــن التعبير عن الطرف الأيسر على صـــورة $\begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}$

ومن تساوى المصفوفات يمكن استنتاج أنه يمكن التعبير عن نظام المعادلات السابق على الصورة الآتية :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \end{bmatrix}$$

تمرين (٢ – ٤)

(١) جد قيمة ما يلى :

(أ) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(جـ) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & -٤ \\ ٢ & ٥ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٤ & ٠ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$

(٢) إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ ، **ب** = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix}$

جد : **أ ب** ، **ب أ**

(٣) إذا كان أ = $\begin{bmatrix} \text{جتا هـ} & -\text{جا هـ} \\ \text{جا هـ} & \text{جتا هـ} \end{bmatrix}$ ، **ب** = $\begin{bmatrix} -\text{جتا هـ} & \text{جا هـ} \\ -\text{جا هـ} & \text{جتا هـ} \end{bmatrix}$

جد أ ب

(٤) إذا كان أ = $\begin{bmatrix} ١ & -٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \end{bmatrix}$ ، **ب** = $\begin{bmatrix} ١ & -٢ & ٣ \\ ٠ & ١ & ٤ \\ -٣ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$

جـ = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ & -٢ \\ -٢ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ٤ \\ ٠ & ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، **د** = $\begin{pmatrix} -٢ & ٤ \\ ١ & -٣ \\ ٠ & -٢ \end{pmatrix}$

جد بُعد كل من المصفوفات التالية :

(أ) **أ ب** (ب) **د أ** (جـ) **أ د** (د) **جـ ب**

(هـ) **ب د** (و) د (**أ ب**) (ر) ب (**د أ**)

(٥) إذ كان أ = $\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}$ ، **ب** = $\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ١ & ١ \end{bmatrix}$

جد

(أ) أ ب　　　(ب) ب أ　　　(جـ) (أ ب) ب

(د) (ب أ) ب　　　(هـ) أ^{٢} ب　　　(و) (ب أ) (أ ب)

(٦) اجر عمليات الضرب التالية كلما أمكن ذلك :

(أ) $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ & -١ & ٤ \\ ٢ & -١ & ٣ & ١ \\ ٥ & ٠ & ٢ & ٣ \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \\ ٣ \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٦ & ٥ & ١ \end{bmatrix}$

(جـ) $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٣ & -٢ \\ ٥ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} ٣ & ١ & -٢ \\ ٥ & -٦ & ٤ \end{bmatrix}$

(٧) عبر عن نظام المعادلات التالية في صورة مصفوفات :

(أ) ٣ س + ص = − ٢
٢ س + ٥ ص = ٤

(ب) س + ٢ ص − ٣ ع = ١
٢ س − ص + ع = ٢
س + ص + ٤ ع = ٠

(٨) حول المصفوفات التالية إلى صورة معادلات:

(أ)

$\begin{pmatrix} ٠ \\ ٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix}$

(ب) $\begin{pmatrix} ١ & ٢- & ٣ \\ ٢ & ٥ & ١- \\ ٣ & ٢ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \\ ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣- \\ ١٠ \\ ٧ \end{pmatrix}$

(٢ – ١١) بعض خواص ضرب المصفوفات :

إن من الخواص المتعلقة بضرب المصفوفات – إضافة لما مر بنا من قواعد وخواص – ما يأتي :

(١) ضرب المصفوفات **غير إبدالي** وقد سبقت الإشارة إلى ذلك في الملاحظات التي تلت تعريف (٢ – ٣). وللتأكد من ذلك خذ مثلاً المصفوفتين :

$$أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix} ، ب = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix}$$

تجد أن أ **ب** $= \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢١ & ٢٥ \\ ١٢ & ٢٠ \end{pmatrix}$ .... (١)

بينما **ب** أ $= \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & ١٠ \\ ٩ & ٣٥ \end{pmatrix}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن أ **ب** $\neq$ **ب** أ

(٢) مصفوفة الوحدة تمثل **العنصر المحايد** لضرب المصفوفات المربعة .

فإذا كان أ $= \begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{pmatrix}$ ، **و** $= \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$

فإن أ **و** $= \begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} \end{pmatrix}$

وكذلك و أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{pmatrix}$

(٣) ضرب المصفوفات **تجميعي** وكمثال لذلك خذ مثلاً المصفوفات :

أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، **ب** = $\begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ، **جـ** = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix}$

نجد أن :

(أ ب) جـ = $$\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix} =$$

أ (ب جـ) = $$\left(\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} =$$

أي أن **(أ ب) جـ = أ (ب جـ)**

(٤) افرض أن :

أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ ، **ب** = $\begin{pmatrix} -٥ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$

تأكد أن **أ ب** = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$ = مصفوفة الوحدة

وأن ب أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ = مصفوفة الوحدة

في مثل هذه الحالة يقال إن كلاً من المصفوفتين أ ، ب نظير ضربي

(٥) إن عملية ضرب المصفوفات تتوزع على عملية جمع المصفوفات وكمثال لذلك خذ مثلاً :

أ = $\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١ \end{pmatrix}$ ، جـ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ١ & -٢ \end{pmatrix}$

ثم جد (١) أ (ب + جـ)

(٢) أ ب + أ جـ

وتحقق من أن أ (ب + جـ) = أ ب + أ جـ

(٦) خلافاً لما هو معروف في ضرب الأعداد قد توجد مصفوفتان لا تساوي أي منهما المصفوفة الصفرية ولكن حاصل ضربهما يساوي المصفوفة الصفرية . مثال :

$$\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٤ & ٠ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$$

تمرين (٢ – ٥)

(١) جد قيمة ما يأتي :

(أ) $[\,١ \quad -٢ \quad ٠\,] \begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$

(ب) إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} -٣ & ١ \\ ٥ & -١ \end{pmatrix}$ ، **ب** = $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & -٢ \end{pmatrix}$

جـ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ -٤ & ٧ \end{pmatrix}$

جد : (أ) أ (**ب جـ**)   (ب) (أ **ب**) **جـ**

(جـ) أ (**ب** + **جـ**)   (د) أ **ب** + أ **جـ**

(٢) جد قيمة :

(أ) $\left(\begin{bmatrix} -٥ & -١ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & -٤ \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ -١ & ٢ \\ ٧ & ٠ \end{pmatrix}$

(جـ) $\begin{pmatrix} ٥ & ٣ \\ -١ & ٢ \\ ٧ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$

(٣) إذا كان أ = $\begin{bmatrix} ت & ٢ت \\ -ت & ٥ \end{bmatrix}$ ، **ب** = $\begin{bmatrix} ١+ت & ١ \\ ت & -٢ \end{bmatrix}$ (ت = $\sqrt{-١}$)

جد : **أ ب** ، **ب أ** ، أ^{٢} ، أ (أ + **ب**)

(٤) إذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & -١ \end{bmatrix}$

اثبت أن :

أ^{٢} – ٢ أ + ٢ **و** = **ص**

حيث **و** مصفوفة الوحدة ، **ص** المصفوفة الصفرية .

(٥) عبر عما يأتي بمصفوفة واحدة

$$[\,\text{س}\ \ \text{ص}\,] \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix}$$

(٦) إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

فاثبت أن : أ^{٢} – ٢ أ = ٣ و (و مصفوفة الوحدة) .

الوحدة الثالثة

$$\frac{1}{س^2 - 9}$$

الكسور الجزئية

الوحدة الثالثة

الأهداف :

يتوقع بعد تدريس هذه الوحدة أن يكون الطالب قادراً على أن :

١. يدرك مفهوم الكسر الجبري ويميزه.
٢. يجزئ الكسر الجبري الذي بسطه مقدار من الدرجة الأولى ومقامه من الدرجة الثانية قابلاً للتحليل.
٣. يجزئ الكسر الجبري الذي بسطه مقدار درجته أكبر من أو تساوي درجة مقامه ، ومقامه مقدار قابل للتحليل.
٤. يجزئ الكسر الجبري إذا كان أحد معاملات مقامه خطياً مكرراً.
٥. يجزئ الكسر الجبري عندما يكون أحد معاملات المقام من الدرجة الثانية غير قابل للتحليل.

(٣) الكســــور الجزئيّــــة

(٣– ١) تمهيد :

مر بنا سابقاً أن الدالة كثيرة الحدود من الدرجة ن تكون في الصورة د (س) = $أ_{.} س^{ن} + أ_{١} س^{ن-١} + أ_{٢} س^{ن-٢} + \dots\dots + أ_{ن}$ حيث $أ_{.}$ ، $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، ..... $أ_{ن}$ ثوابت ، $أ_{.} \neq$ صفر ، ن عدد صحيح موجب أو صفر . ويمكن التعبير عن كل كثيرة حدود ذات معاملات حقيقية في أغلب الأحيان بحاصل ضرب كثيرات حدود من الدرجة الأولى في الصورة أ س + ب ومعاملات من الدرجة الثانية من الشكل أ $س^{٢}$ + ب س + جـ .

وقد تكون الدالة كسرية في الصورة د (س) = $\frac{هـ (س)}{ر (س)}$ حيث كل من هـ (س) ، ر (س) كثيرة حدود . فإذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام فإن د (س) تسمى كسراً حقيقياً أو كسراً جبرياً بحتاً وخلاف ذلك فإن د (س) تسمى كسراً غير حقيقي .

ومن دراستنا للاختصار عرفنا كيفية الحصول على كسر جبري واحد مساوٍ لمجموع كسرين أو أكثر بأخذ المضاعف المشترك الأصغر لمقامات تلك الكسور .

فمثلاً :

$$\frac{٢}{س + ٣} + \frac{٥}{٢س - ١} = \frac{٢ (٢ س - ١) + ٥ (س + ٣)}{(س + ٣) (٢ س - ١)}$$

$$= \frac{٤ س - ٢ + ٥ س + ١٥}{(س + ٣) (٢ س - ١)} = \frac{٩ س + ١٣}{(س + ٣) (٢ س - ١)}$$

وسندرس الآن العملية العكسية لذلك وهي :

إذا كان لدينا كسر بحت معلوم يمكن تحليل مقامه إلى عوامل أولية ، والمطلوب إيجاد كسور بحتة بسيطة يكون مجموعها الجبري مساوٍ للكسر المعلوم ويكون لكل منها مقام مساوٍ أحد عوامل مقام الكسر المعلوم ، تسمى هذه

الكسور الكسور الجزئية ، ونقول أننا جزأنا الكسر المعلوم إلى كسوره الجزئية . وعليه يمكننا القول إن كل دالة كسرية يمكن التعبير عنها بمجموع كسور جزئية مقاماتها من الشكل (أ س + ب)^{ن} أو (أ س^{٢} + ب س + جـ)^{ن} حيث ن عدد صحيح موجب . وهنا تنشأ حسب طبيعة معاملات المقام الحالات الثلاث التالية :

✓ **(٣ – ٢) الحالة الأولى : عندما تكون معاملات المقام خطية(من الدرجة الأولى)**

إذا قمنا بتحليل مقام دالة كسرية حقيقية إلى عدة عوامل خطية (من الدرجة الأولى) فإننا يمكن أن نحول الدالة الكسرية إلى كسور جزئية بعدد العوامل ، كل عامل يقابله كسر جزئي وحيد ، بسطه عدد ثابت ومقامه أحد عوامل مقام الدالة الكسرية والمثال التالي يوضح ذلك :

مثال (١) :

اكتب الكسر $\frac{٥\text{ س} + ٢}{\text{س}^{٢} - ٤}$ باستخدام كسوره الجزئية .

الحل :

بتحليل المقام ينتج :

$$\frac{٥\text{ س} + ٢}{\text{س}^{٢} - ٤} = \frac{٥\text{ س} + ٢}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}$$

لاحظ أن في المقام عاملين خطيين (من الدرجة الأولى) يناظرهما كسران جزئيان يكون البسط في كل منهما عدداً ثابتاً أي :

$$\frac{٥\text{ س} + ٢}{\text{س}^{٢} - ٤} = \frac{٥\text{ س} + ٢}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)} = \frac{\text{أ}}{\text{س} - ٢} + \frac{\text{ب}}{\text{س} + ٢}$$

حيث أ ، ب ثابتان يتحتم إيجاد قيمتيهما العددية وللتخلص من المقام في الطرفين نضرب في (س – ٢) (س + ٢) فينتج :

٥ س + ٢ = أ (س + ٢) + ب (س – ٢)

ويمكننا إيجاد قيم الثابتين أ ، ب بإعطاء س قيماً مناسبة . وأنسبها القيم التي تجعل عوامل مقام الكسر تساوي الصفر وهي :

س = ٢ أو س = $^{-}$٢

بوضع س = $^{-}$٢ في الطرفين ينتج :

٥ × ٢ + ٢ = أ (٢ + ٢) + ب (٢ − ٢)

∴ ١٢ = ٤ أ ⇐ أ = ٣

وبوضع س = $^{-}$٢ في الطرفين ينتج :

٥ × $^{-}$٢ + ٢ = أ ($^{-}$٢ + ٢) + ب ($^{-}$٢ − ٢)

∴ $^{-}$٨ = $^{-}$٤ ب ⇐ ب = ٢

فيكون :

$$\frac{٥\text{س} + ٢}{\text{س}^{٢} - ٤} = \frac{٣}{\text{س} - ٢} + \frac{٢}{\text{س} + ٢}$$

إذا كان الكسر المعلوم كسراً مركباً درجة بسطه أكبر من ، أو تساوي درجة مقامه نحولّه إلى مجموع كثيرة حدود وكسر حقيقي بحت بقسمة البسط على المقام كما في المثال التالي :

مثال (٢) :

جزئ $\frac{٢\text{س}^{٣} + ٧\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٢}{٢\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦}$ إلى كسوره الجزئية .

الحل :

نقسم البسط على المقام بالقسمة المطولة لأن درجة البسط اكبر من درجة المقام كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{1}{r}{\text{س} + ٣} & \\ \hline ٢\text{س}^{٣} + ٧\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٢ & ٢\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦ \\ ٢\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٦\text{س} & \\ \hline ٦\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٢ & \\ ٦\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ١٨ & \\ \hline \text{س} + ١٦ & \end{array}$$

$$\therefore \frac{٢\text{س}^{٣} + ٧\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ٢}{٢\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦} = (\text{س} + ٣) + \frac{\text{س} + ١٦}{٢\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦}$$

ثم نجزئ الكسر البحت إلى كسور جزئية بتحليل المقام أولاً :

$$\frac{\text{س} + ١٦}{٢\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦} = \frac{\text{س} + ١٦}{(٢\text{س} - ٣)(\text{س} + ٢)}$$

ثم نتابع الحل كما في المثال السابق

$$\frac{\text{س} + ١٦}{(٢\text{س} - ٣)(\text{س} + ٢)} = \frac{\text{أ}}{٢\text{س} - ٣} + \frac{\text{ب}}{\text{س} + ٢}$$

$$\therefore \text{س} + ١٦ = \text{أ}\,(\text{س} + ٢) + \text{ب}\,(٢\text{س} - ٣)$$

بوضع $\text{س} = \frac{٣}{٢}$

$$\frac{٣}{٢} + ١٦ = \text{أ}\left(\frac{٣}{٢} + ٢\right) + \text{ب}\left(٢ \times \frac{٣}{٢} - ٣\right)$$

$$\therefore \frac{٣٥}{٢} = \frac{٧\,\text{أ}}{٢} \Leftarrow \text{أ} = ٥$$

وبوضع س = ‾٢

$\text{٢} - \text{١٦} + \text{= ب}\ (\text{٤}^{-} - \text{٣})$

١٤ = − ٧ ب ⇐ ب = ‾٢ فيكون :

$$\frac{\text{٢ س}^{\text{٣}} + \text{٧س}^{\text{٢}} - \text{٢س} - \text{٢}}{\text{٢ س}^{\text{٢}} + \text{س} - \text{٦}} = (\text{س} + \text{٣}) + \frac{\text{٥}}{\text{٢س} - \text{٣}} - \frac{\text{٢}}{\text{س} + \text{٢}}$$

مثال (٣) :

جزئ الكسر التالي إلى كسور جزئية :

$$\frac{\text{س} + \text{١}}{\text{س}^{\text{٣}} + \text{س}^{\text{٢}} - \text{٦ س}}$$

الحل :

$$\frac{\text{س} + \text{١}}{\text{س}^{\text{٣}} + \text{س}^{\text{٢}} - \text{٦ س}} = \frac{\text{س} + \text{١}}{\text{س}\ (\text{س} + \text{٣})\ (\text{س} - \text{٢})}$$

$$= \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب}}{\text{س} + \text{٣}} + \frac{\text{جـ}}{\text{س} - \text{٢}}$$

∴ س + ١ = أ (س + ٣) (س − ٢) + ب س (س − ٢) + جـ س (س + ٣)

بوضع س = ٠

$\text{١} = \text{٦}^{-}\ \text{أ} \Leftarrow \text{أ} = -\frac{\text{١}}{\text{٦}}$

بوضع س = ٢

$\text{٣} = \text{١٠ جـ} \Leftarrow \text{جـ} = \frac{\text{٣}}{\text{١٠}}$

بوضع س = − ٣

$\text{٢}^{-} = \text{١٥ ب} \Leftarrow \text{ب} = \frac{\text{٢}-}{\text{١٥}}$

$$\therefore \frac{\text{س} + \text{١}}{\text{س}^{\text{٣}} + \text{س}^{\text{٢}} - \text{٦ س}} = -\frac{\text{١}}{\text{٦ س}} - \frac{\text{٢}}{\text{١٥ (س + ٣)}} + \frac{\text{٣}}{\text{١٠(س − ٢)}}$$

تمرين (٣– ١)

اكتب الكسور التالية بصورة كسورها الجزئية :

(١) $\frac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٩}}$ (٢) $\frac{\text{س} - \text{١}}{\text{س}\,(\text{س} + \text{١})}$

(٣) $\frac{\text{٨ س} - \text{١٧}}{(\text{س} - \text{١})\,(\text{س} - \text{٤})}$ (٤) $\frac{\text{س} + \text{١}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{س}}$

(٥) $\frac{\text{س}}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٤ س} - \text{٥}}$ (٦) $\frac{\text{س}^{\text{٣}} + \text{١}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤ س} + \text{٣}}$

(٧) $\frac{\text{س} - \text{١}}{\text{س}\,(\text{س} + \text{١})\,(\text{٢س} - \text{١})}$ (٨) $\frac{\text{س}^{\text{٣}} + \text{٣ س} - \text{٢}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{س}}$

(٩) $\frac{\text{س}^{\text{٣}} - \text{٦ س}^{\text{٢}} + \text{٥ س} - \text{٣}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{١}}$ (١٠) $\frac{\text{٤س}^{\text{٣}} - \text{٣ س}^{\text{٢}} - \text{١٢ س} - \text{٣}}{\text{٤س}^{\text{٢}} - \text{١٣ س} - \text{١٧}}$

(٣– ٣) الحالة الثانية :

عندما يكون أحد معاملات المقام خطياً متكرراً (أي مرفوع إلى قوة معينة) :
إذا كان أحد معاملات المقام الخطية في الدالة الكسرية مرفوع إلى القوة ن فإن عدد الكسور الجزئية المقابلة له تساوي ن كسراً جزئياً .

مثلاً لنجزئ الكسر $\frac{\text{٣ س} + \text{٥}}{\text{س}^{\text{٣}} - \text{س}^{\text{٢}} - \text{س} + \text{١}}$ إلى كسوره الجزئية نجد أن :

$\text{س}^{\text{٣}} - \text{س}^{\text{٢}} - \text{س} + \text{١} = (\text{س} + \text{١})\,(\text{س} - \text{١})^{\text{٢}}$

إذن :

$$\frac{3\text{س} + 5}{\text{س}^3 - \text{س}^2 - \text{س} + 1} = \frac{\text{أ}}{\text{س} + 1} + \frac{\text{ب}}{\text{س} - 1} + \frac{\text{جـ}}{(\text{س} - 1)^2}$$

لاحظ أن معامل المقام $(\text{س} - 1)^2$ قد قابله كسرين جزئيين هما :

$\frac{\text{ب}}{\text{س} - 1}$ و $\frac{\text{جـ}}{(\text{س} - 1)^2}$ وبالتالي :

$$3\text{س} + 5 = \text{أ}(\text{س} - 1)^2 + \text{ب}(\text{س} - 1)(\text{س} + 1) + \text{جـ}(\text{س} + 1)$$

إذا وضعنا س = ١ نجد أن :

$$8 = 2\text{جـ} \Leftarrow \text{جـ} = 4$$

وإذا وضعنا س = $^-1$ نجد أن :

$$2 = 4\text{أ} \Leftarrow \text{أ} = \frac{1}{2}$$

ولتعيين الثوابت الأخرى استخدم أي قيمة أخرى لـــ س مثلاً س = ٠ فنجد أن :

$$5 = \text{أ} - \text{ب} + \text{جـ} \text{ ومنه}$$

$$5 = \frac{1}{2} - \text{ب} + 4 \Leftarrow \text{ب} = \frac{^-1}{2}$$

إذن :

$$\frac{3\text{س} + 5}{\text{س}^3 - \text{س}^2 - \text{س} + 1} = \frac{1}{2(\text{س} + 1)} - \frac{1}{2(\text{س} - 1)} + \frac{4}{(\text{س} - 1)^2}$$

مثال (٢) :

اكتب الكسر $\frac{\text{س}^4 - \text{س}^3 - \text{س} - 1}{\text{س}^3 - \text{س}^2}$ بصورة كسوره الجزئية .

الحل :

درجة البسط أكبر من درجة المقام
إذن بالقسمة المطولة نجد أن :

$$\begin{array}{r|l} \text{س} & \\ \hline \text{س}^{٤} - \text{س}^{٣} - \text{س} - ١ & \text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} \\ \text{س}^{٤} - \text{س}^{٣} & \\ \hline - \text{س} - ١ & \end{array}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{س}^{٤} - \text{س}^{٣} - \text{س} - ١}{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢}} = \text{س} - \frac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢}}$$

$$= \text{س} - \frac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٢}\,(\text{س} - ١)}$$

لنكتب :

$$\frac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٢}\,(\text{س} - ١)} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\text{ب}}{\text{س}^{٢}} + \frac{\text{جـ}}{\text{س} - ١}$$

بضرب الطرفين في $\text{س}^{٢}\,(\text{س} - ١)$

يكون $\text{س} + ١ = \text{أ س}\,(\text{س} - ١) + \text{ب}\,(\text{س} - ١) + \text{جـ س}^{٢}$

بوضع س = ٠

نجد أن $١ = -\text{ب} \Leftarrow \text{ب} = -١$

بوضع س = ١ ، فإننا نجد :

٢ = جـ

بوضع س = ٢ نجد أن :

$٣ = ٢\text{أ} + \text{ب} + ٤\,\text{جـ}$

$\therefore ٣ = ٢\text{أ} - ١ + ٨$ ومنه $\text{أ} = -٢$

وهكذا يكون :

$$\frac{س^٤ - س^٣ - س - ١}{س^٣ - س^٢} = س - \left(\frac{-٢}{س} - \frac{١}{س^٢} + \frac{٢}{س - ١} \right)$$

$$= س + \frac{٢}{س} + \frac{١}{س^٢} - \frac{٢}{س - ١}$$

تمرين (٣– ٢) ؟

اكتب ما يــأتي بصورة كسور جزئية :

(١) $\frac{س}{(س - ٢)^٢}$ (٢) $\frac{١}{س\,(س + ١)^٢}$

(٣) $\frac{س^٢ - ٢}{س^٢\,(س + ١)}$ (٤) $\frac{٢٢\,س - ٥}{(س + ٢)\,(٣\,س - ١)^٢}$

(٥) $\frac{١}{س^٣\,(س + ٢)}$ (٦) $\frac{٥\,س^٢ + ٣٠\,س + ٤٣}{(س + ٣)^٣}$

(٧) $\frac{٧س - ١}{(٣س - ٤)\,(س - ١)^٢}$ (٨) $\frac{س^٤}{(١ - س)^٢}$

(٩) $\frac{س^٢ + ٤\,س + ٧}{(س + ٢)\,(س + ٣)^٢}$ (١٠) $\frac{س^٣ + ٣\,س^٢ + ٣\,س + ٦٣}{(س^٢ - ٩)^٢}$

(٣– ٤) الحالة الثالثة :

إذا كان أحد معاملات المقام من الدرجة الثانية ولا يمكن تحليله :

إذا احتوى مقام الدالة الكسرية المطلوب تحليله على عامل من الدرجة الثانية على الصورة (أ $س^٢$ + ب س + جـ) بحيث لا يمكن تحليله إلى عاملين حقيقيين فإن بسط الكسر المناظر له يكون مقداراً من الدرجة الأولى في الصورة (ل س + ك) حيث ل ، ك ثابتان ينبغي إيجاد قيمتيهما .

أما إذا كان هذا العامل مكرراً أي على الصورة $(أ س^{٢} + ب س + جـ)^{ن}$ فإن الكسور الجزئية المناظرة له تكون عبارة عن مجموع ن كسراً جزئياً على الصورة :

$$\frac{ل_{١} س + ك_{١}}{أ س^{٢} + ب س + جـ} + \frac{ل_{٢} س + ك_{٢}}{(أ س^{٢} + ب س + جـ)^{٢}} + \ldots + \frac{ل_{ن} س + ك_{ن}}{(أ س^{٢} + ب س + جـ)^{ن}}$$

حيث $ل_{ر}$ ، $ك_{ر}$ ثوابت ينبغي إيجاد قيمها ، ر عدد صحيح من ١ إلى ن.والمثال التالي يوضح ذلك .

مثال (١) :

اكتب $\frac{٢ س^{٢} - ٥ س + ١٠}{(س + ٢) (س^{٢} + س + ٥)}$ بصورة كسوره الجزئية

الحل :

المقدار $س^{٢} + س + ٥$ ليس له عوامل حقيقية فيكون الكسر المعلوم مطابقاً لكسرين جزئيين مقام الأول س + ٢ وبسطه مقدار ثابت ومقام الآخر $(س^{٢} + س + ٥)$ وبسطه مقدار من الدرجة الأولى وليكن ب س + جـ فيكون :

$$\frac{٢ س^{٢} - ٥ س + ١٠}{(س + ٢) (س^{٢} + س + ٥)} = \frac{أ}{س + ٢} + \frac{ب س + جـ}{س^{٢} + س + ٥}$$

بضرب الطرفين في المقام نحصل على :

$$٢ س^{٢} - ٥ س + ١٠ = أ (س^{٢} + س + ٥) + (ب س + جـ) (س + ٢)$$

لإيجاد قيم الثوابت أ ، ب ، جـ يمكن أن نعوض قيماً لـــ س مثل ٢ ، ٠ .. الخ كما في الحالات السابقة التي مرت علينا أو نلجأ إلى تساوي معاملات قوى س في الطرفين .

فبوضع س = $\overline{٢}$ ينتج :

$$٨ + ١٠ + ١٠ = أ (٤ - ٢ + ٥)$$

$$\therefore أ = ٤$$

وبمساواة معامل $س^{٢}$ في الطرفين ينتج :

$٢ = أ + ب$

$\therefore ب = {}^{-}٢$

وبمساواة الحد المطلق (أو بوضع $س = ٠$)

$١٠ = ٥ أ + ٢ جـ$ ومنه $جـ = {}^{-}٥$

$$\therefore \frac{٢ س^{٢} - ٥ س + ١٠}{(س + ٢) (س^{٢} + س + ٥)} = \frac{٤}{س + {}^{-}٢} \quad \frac{٢س + ٥}{س^{٢} + س + ٥}$$

مثال (٢) :

جزئ إلى كسور جزئية $\frac{٥ س^{٣} - ٣ س^{٢} + ٧ س - ٣}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

الحل : $\frac{٥ س^{٣} - ٣ س^{٢} + ٧ س - ٣}{(س^{٢} + ١)^{٢}} = \frac{أ س + ب}{س^{٢} + ١} + \frac{جـ س + د}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$

وعليه يكون :

$٥ س^{٣} - ٣س^{٢} + ٧ س - ٣ = (أ س + ب) (س^{٢} + ١) + جـ س + د$

وذلك بضرب الطرفين في المقدار $(س^{٢} + ١)^{٢}$

$\therefore ٥س^{٣} - ٣س^{٢} + ٧س - ٣ = أ س^{٣} + ب س^{٢} + (أ + جـ) س + (ب + د)$

بمساواة معامل $س^{٣}$ ينتج $أ = ٥$

وبمساواة معامل $س^{٢}$ ينتج $ب = -٣$

وبمساواة معامل س نجد أن :

$أ + جـ = ٧ \Leftarrow جـ = ٧ - ٥ = ٢$

وبمقارنة الحد المطلق يكون :

$ب + د = {}^{-}٣$ أو $د = {}^{-}٣ - ({}^{-}٣) = ٠$

$$\therefore \frac{٥ س^{٣} - ٣ س^{٢} + ٧ س - ٣}{(س^{٢} + ١)^{٢}} = \frac{٥ س - ٣}{س^{٢} + ١} + \frac{٢س}{(س^{٢} + ١)^{٢}}$$

تمرين (٣– ٣) ؟

اكتب ما يلي بصورة كسور جزئية :

(١) $\frac{٢\text{س} + ٨}{\text{س}^{٣} - ٨}$

(٢) $\frac{٢\text{س}^{٣} + ٣}{(\text{س}^{٢} + ١)^{٢}}$

(٣) $\frac{\text{س}^{٥}}{(\text{س}^{٢} + ٤)^{٢}}$

(٤) $\frac{\text{س}^{٤} + ٥}{(\text{س} + ١)(\text{س}^{٢} + ١)}$

(٥) $\frac{\text{س}^{٣} + ١}{(٤\text{س}^{٢} + ١)^{٢}}$

(٦) $\frac{\text{س} - ٣}{(\text{س} - ١)^{٢}(\text{س}^{٢} + ٢)}$

(٧) $\frac{٢\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + ٤}{(\text{س}^{٢} + ٤)^{٢}}$

(٨) $\frac{٤\text{س}}{(\text{س}^{٢} + ١)^{٣}}$

(٩) $\frac{٦\text{س}^{٣} - ١١\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٤}{\text{س}(\text{س} - ٢)(\text{س}^{٢} + ١)}$

(١٠) $\frac{\text{س}^{٤} + ٨\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١}{(\text{س}^{٢} + \text{س})(\text{س}^{٢} + ١)}$

تذكر أن :

- تكون الدالة د (س) دالة كسرية إذا كانت الصورة د(س) = $\frac{\text{هـ (س)}}{\text{ر (س)}}$ حيث كل من هـ (س) ، ر (س) كثيرة حدود ويسمى الطرف الأيسر في هذه الحالة كسراً جبرياً.
- إذا كان مقام الكسر الجبري يمكن تحليله إلى عوامل من الدرجة الأولى ، مثل :

$$\text{د(س)} = \frac{\text{هـ (س)}}{\text{(أس +ب) (جـ س + د) (...)}}$$

فإن الكسر الجبري يمكن كتابته على الصورة.

د(س)= $\frac{\text{أ}_1}{\text{أس+ب}}$ + $\frac{\text{أ}_2}{\text{جـ س+د}}$ + ... حيث أ_1،أ_2،.. ثوابت يمكن الحصول عليها بطريقة الضرب العكسي ثم التعويض بقيم معينة للمتغير س.

- إذا كان درجة البسط أكبر من درجة المقام تقسم البسط على المقام أولاً ثم نجزئ الكسر الناتج من باقي القسمة بعد ذلك.
- إذا كان أحد عوامل المقام مرفوعاً للقوة ن فينتج عن ذلك ن كسر جزئيي البسط في كل منها ثابت ومقامه العامل مرفوعاً للقوة ١، ٢، ...، ن.
- إذا كان أحد عوامل المقام من الدرجة الثانية غير قابل للتحليل فإن بسطه يكون من الدرجة الأولى.

الوحدة الرابعة

ح (أ′ ∪ ب)

الاحتمالات

الوحدة الرابعة

الأهداف:

يتوقع بعد تدريس هذه الوحدة أن يكون الطالب قادراً على أن:

١. يعرّف التجربة العشوائية ويمثّل لها.
٢. يعرّف فضاء العينة للتجربة العشوائية ويجده.
٣. يعرف الحادثة ويحدد عناصرها في صورة مجموعة .
٤. يجد اتحاد أو تقاطع حادثتين.
٥. يعرّف الحادثتين المتنافيتين ويميزها.
٦. يجد الفرق بين الحادثتين.
٧. يجد مكملة الحادثة.
٨. يذكر مسلمات نظرية الاحتمالات الثلاث.
٩. يستخدم المسلمات في برهان بعض النظريات الخاصة بالاحتمالات.
١٠. يمثّل الحوادث الناتجة عن اتحاد أو تقاطع أو فرق حادثتين أو مكملة حادثة على أشكال فين.
١١. يميز حالة الاحتمالات المتساوية ويجد احتمال الحادثة في هذه الحالة.
١٢. يستخدم توزيع ذات الحدين لإيجاد احتمال الحادثة في حالة الاحتمال الثنائي.
١٣. يستخدم المخطط الشجري لإيجاد احتمال الحادثة في حالات حوادث السحب دون إحلال.

(٤) الاحتمـــالات

(٤– ١) مقدمة :

الاحتمالات أحد فروع الرياضيات الذى يهتم بدراسة نتائج التجارب أو المحاولات العشوائية . وهي تلعب دوراً خاصاً في الحياة اليومية لأنها تستخدم في قياس عدم التأكد .

فكثيراً ما يتم اتخاذ قرارات بناء على معلومات غير كاملة ، فيكون دور الاحتمالات المساعدة على الاختيار . فقد نلغي رحلة تم الترتيب لها ؛ لأن احتمال أن يكون الجو رديئاً احتمال كبير . وكثيراً ما نتحدث عن احتمال هطول المطر أو احتمال فوز فريق كرة قدم على فريق آخر .

وقد نعبر عن هذه الاحتمالات في صورة عددية كالنسبة المئوية كأن تقول إن احتمال ارتفاع درجات الحرارة هذه الليلة ٧٠٪ . واحتمال أن ينجح أحمد في الامتحان ٨٥٪ . وهذه التقريرات لاتستند إلى أساس رياضى محض ، بل تعتمد على أحداث وخبرات سابقة عن الطقس أو عن حالة أحمد التعليمية ولنظرية الاحتمالات تطبيقات كثيرة وهامة في مجال التخطيط للتنمية الاقتصادية والاجتماعية والبحث العلمي . وفي اتخاذ القرارات في كثير من مجالات العمل اليومي.

(٤– ٢) التجربة العشوائية :

التجربة هي كل عملية أو إجراء تؤدى إلى ملاحظة أو مشاهدة . تسمى التجربة أو المحاولة عشوائية إذا كنا نعلم مسبقاً جميع نواتجها الممكنة دون أن نتمكن من التنبؤ بأن أي من هذه النواتج سيتحقق فعلاً .

فمثلاً عند إلقاء قطعة نقود فإن نواتج هذه التجربة ستكون إحدى الحالتين الصورة أو الكتابة ، ولكننا لانستطيع أن نتنبأ أيهما سيكون السطح العلوى لقطعة النقود . إذن إلقاء قطعة النقود تجربة عشوائية ، وكذلك عند إلقاء حجر النرد وتسجيل عدد النقط المنقوشة على الوجه الظاهر ، فإن النواتج الممكنة ستكون أحد القيم ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ دون أن نتمكن من التنبؤ بناتج التجربة فعلاً. وعليه فإن هذه التجربة تجربة عشوائية .

(٤– ٣) فضاء العينة :

إن مجموعة جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية تسمى فضاء العينة.

تعريف (٤– ١) :

> فضاء العينة هو مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية . وتسمى كل نتيجة ممكنة نقطة عينة . وسنرمز لفضاء العينة بالرمز ع .

ففي تجربة قذف قطعة النقود ، وملاحظة الوجه الذي سيظهر عند استقرار القطعة نجد أن جميع النتائج الممكنة لها هي (صورة) أو (كتابة) فإذا رمزنا للصورة بالرمز (ص) وللكتابة بالرمز (ك) فإن مجموعة النواتج لهذه التجربة هى { ص ، ك } .

وعليه يكون فضاء العينة لهذه التجربة هو :

ع = { ص ، ك } .

وبالمثل فإن فضاء العينة لتجربة رمي حجر النرد وتسجيل عدد النقط التي تظهر على الوجه العلوي هو

ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } .

للنظر إلى التجربة التالية :

ألق قطعة النقود ثم ألق حجر النرد . تسمى مثل هذه التجربة تجربة عشوائية مركبة لأنها تكونت من تجربتين عشوائيتين بسيطتين . أو كتجربة إلقاء قطعة النقود مرتين . فإذا أردنا تحديد فضاء العينة للتجربة المركبة الأخيرة مثلاً – نجد أن فضاء العينة لها يتضمن أربعة ازواج مرتبة حيث يرمز المكون الأول من كل زوج إلى نتيجة القطعة في المرة الأولى ويرمز المكون الثاني لنتيجة القطعة في المرة الثانية .

ونقطة العينة في هذه الحالة هى زوج مرتب من الحروف وفضاء العينة هو مجموعة الازواج المرتبة وهى :

ع = { (ص ، ص) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) ، (ص ، ك) }

	ص	ك
ص	**(ص،ص)**	**(ص،ك)**
ك	**(ك،ص)**	**(ك،ك)**

تدريب :

اكتب فضاء العينة لتجربة قذف ثلاث قطع نقود .

مثال (١) :

التجربة هي قذف حجري نرد . اكتب فضاء العينة ع لهذه التجربة :

الحل :

الجدول (٤– ١) التالي يمثل فضاء العينة لهذه التجربة

النتيجة على الحجر الثاني

النتيجة على الحجر الأول

	١	٢	٣	٤	٥	٦
١	(١ ، ١)	(١ ، ٢)	(١ ، ٣)	(١ ، ٤)	(١ ، ٥)	(١ ، ٦)
٢	(٢ ، ١)	(٢ ، ٢)	(٢ ، ٣)	(٢ ، ٤)	(٢ ، ٥)	(٢ ، ٦)
٣	(٣ ، ١)	(٣ ، ٢)	(٣ ، ٣)	(٣ ، ٤)	(٣ ، ٥)	(٣ ، ٦)
٤	(٤ ، ١)	(٤ ، ٢)	(٤ ، ٣)	(٤ ، ٤)	(٤ ، ٥)	(٤ ، ٦)
٥	(٥ ، ١)	(٥ ، ٢)	(٥ ، ٣)	(٥ ، ٤)	(٥ ، ٥)	(٥ ، ٦)
٦	(٦ ، ١)	(٦ ، ٢)	(٦ ، ٣)	(٦ ، ٤)	(٦ ، ٥)	(٦ ، ٦)

جدول (٤– ١)

أو بصورة رمزية :

ع = { (س ، ص) : س عدد صحيح بين ٠ ، ٧ ؛ ص عدد صحيح بين ٠ ، ٧ } حيث س هي النتيجة الملاحظة على الحجر الأول ، ص هي النتيجة الملاحظة على الحجر الثاني .

عدد نقاط العينة ٣٦ ، لماذا ؟

ما عدد نقاط فضاء العينة في تجربة قذف ثلاثه أحجار نرد وهل يكافئ ذلك تجربة قذف حجر نرد ثلاث مرات ؟

مثال (٢) :

خذ قطعة نقود وألقها عدداً من المرات حتى نحصل على الصورة لأول مرة . جد عدد مرات ظهور الكتابة قبل ظهور الصورة واكتب فضاء العينه لهذه التجربة .

الحل :

قد يكون أحد نواتج هذه التجربة ص . أى أن الصورة ظهرت في الرمية الأولى فيكون عدد مرات ظهور الكتابة صفراً . وقد يكون الناتج ك ، ص . أى الكتابة ظهرت مرة واحدة قبل ظهور الصورة . وقد يكون الناتج هو ك ، ك ، ص . أى ظهرت الكتابة مرتين قبل ظهور الصورة للمرة الأولى .
وقد يكون ك ، ك ، ك ، ك ، ص وهو ناتج من نواتج هذه التجربة وهو ٤ .
أي أن فضاء العينة لهذه التجربة هو مجموعة غير منتهية يمكن تمثيلها بمجموعة الأعداد الكلية أي:
{ ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٠٠٠ }

تمرين (٤– ١) ؟

(١) يراد تكوين لجنة من الطلاب أ ، ب ، جـ تتكون من عضوين فقط . اكتب فضاء العينة لهذه التجربة .
(٢) صندوق يحتوي على كرات بيضاء ، وسوداء ، وصفراء . ارمز للكرة البيضاء بالرمز ب ، وللسوداء بالرمز س ، وللصفراء بالرمز ص . يراد سحب ثلاث كرات على التوالي من الصندوق . اكتب فضاء العينة لهذه التجربة . بحيث لا يقل كل نوع عن ٣ كرات .
(٣) إذا كانت التجربة هي تسجيل عدد حوادث السيارات بطريق الخرطوم مدني خلال شهر يوليو . ما فضاء العينة لهذه التجربة ؟
(٤) التجربة هي قذف حجر نرد ثم قذف قطعة نقود اكتب فضاء العينة لهذه التجربة.

(٤– ٤) الحادثة :

عرفنا أن فضاء العينة يمثل مجموعة جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية . ولكن أحياناً ينحصر اهتمامنا على بعض نتائج التجربة العشوائية . وفى هذه الحالة سوف ينحصر اهتمامنا على العناصر التى تمثلها تلك النتائج وهذه العناصر تكون مجموعة جزئية من فضاء العينة وكل مجموعة جزئية من فضاء العينة تسمى حادثة :

تعريف (٤– ٢) :

> الحادثة هي أي مجموعة جزئية من فضاء العينة . وإذا كانت هذه المجموعة الجزئية تحتوى عنصراً واحداً فقط تسمى حادثة بسيطة .

فإذا أخذنا تجربة إلقاء قطعتى نقود مرة واحدة ، فإن فضاء العينة لهذه التجربة كما نعلم هو :

ع= { (ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك) }

فلنأخذ المجموعات الجزئية التالية ونعبر عنها لفظياً

أ$_{1}$ = { (ص ، ص) } : (حادثة بسيطة تمثل ظهور صورتين) .

أ$_{2}$ = { (ص ، ص) ، (ك ، ك) } : (حادثة ظهور وجهين متشابهين) .

أ$_{3}$ = { (ص ، ص) (ص ، ك) ، (ك ، ص) } : (حادثة ظهور صورة واحدة على الأقل) .

مثال (١) :

في تجربة قذف حجر نرد وتسجيل عدد النقط على الوجه الظاهر عند استقراره ، اكتب الحوادث التالية :

أ : الحصول على عدد أقل من ٤.

ب: الحصول على عدد زوجي.

ج : الحصول على عدد فردي.

د : الحصول على عدد أكبر من ٣ .

ه : الحصول على عدد أكبر من ٦ .

الحل :

أ = { ١ ، ٢ ، ٣ }

ب = { ٢ ، ٤ ، ٦ }

جـ = { ١ ، ٣ ، ٥ }

د = { ٤ ، ٥ ، ٦ }

هـ = ∅ (المجموعة الخالية)

مثال (٢) :

في تجربة رمي حجري نرد وتسجيل عدد النقط على الوجهين الظاهرين، اكتب الحوادث التالية :

أ : الحصول على العدد نفسه من الحجرين .

ب: الحصول على مجموع أكبر من ٩ .

جـ : الحصول على مجموع أقل من ٥ .

د : الحصول على ١ من المكعب الأول .

هـ : الحصول على مجموع أقل من ٢ .

و : الحصول على عددين الفرق بينهما يساوى الواحد .

الحل :

أ = { (١ ، ١) ، (٢، ٢) ، (٣، ٣) ، (٤، ٤) ، (٥، ٥) ، (٦، ٦) }

ب = { (٤ ، ٦) ، (٥، ٥) ، (٦، ٤) ، (٥، ٦) ، (٦، ٥) ، (٦، ٦) }

جـ = { (١ ، ١) ، (١، ٢) ، (١، ٣) ، (٣، ١) ، (٢، ١) ، (٢، ٢) }

د = { (١ ، ١) ، (١، ٢) ، (١، ٣) ، (١، ٤) ، (١، ٥) ، (١، ٦) }

هـ = ∅

و= { (١ ، ٢) ، (٢، ١) ، (٢، ٣) ، (٣، ٢) ، (٣، ٤) ، (٤، ٣) ، (٤، ٥) ، (٥، ٤) ، (٥، ٦) ، (٦، ٥) }

تلاحظ أنه قد برز لنا أن بعض الحوادث تساوى المجموعة الخالية ∅ .

وبالمثل بما أن مجموعة فضاء العينة ع مجموعة جزئية من نفسها (ع ⊆ ع) فإنه من التعريف يمكننا القول إن ∅ ، ع حادثتان .

وفي نظرية الاحتمالات نفترض دائماً أن ∅ حادثة ونسميها الحادثة المستحيلة ، كما نفترض أن ع حادثة ونسميها الحادثة الأكيدة .

تمرين (٤– ٢) ❓

(١) في تجربة رمي حجر النرد اكتب كلاً من الحوادث التالية :

$أ_١$: أن يكون مجموع النقط على وجهى الحجرين ٨ .

$أ_٢$: أن يكون العدد على الحجر الأول زوجياً وعلى الثاني فردياً .

$أ_٣$: أن يكون العدد على الحجر الأول ٣ وعلى الثاني فردياً .

(٢) في تجربة قذف حجر النرد ثم قطعة النقود ، اكتب فضاء العينة ع ، وحدد نقاط العينة في كل من الحوادث التالية :

أ : الحصول على عدد فردى على حجر النرد .

ب : الحصول على الوجه ك على قطعة النقود .

جـ : الحصول على الوجه ص من قطعة النقود وعلى عدد أقل من ٤ على حجر النرد .

هـ : الحصول على الوجه ك من قطعة النقود وعدد لا يقل عن ٣ من حجر النرد.

(٣) قذفنا قطعة نقود ثلاث مرات . اكتب فضاء العينة ع ، عبر عن الحوادث التالية :

أ : أن تكون نتيجة القذفة الثانية ص .

ب : الحصول على الوجه ك مرتين على الأكثر .

جـ : أن تكون نتيجة القذفة الثالثة ك .

✓(٤– ٥) العمليات على الحوادث :

عرفنا الحادثة على أنها مجموعة جزئية من فضاء العينة ع ، وعناصرها هى نقاط فضاء العينة . فإذا اتخذنا كلمة حادثة بدلاً عن مجموعة ، ونقطة عينة بدلاً عن العنصر في المجموعة ، يمكننا أن نعرف بعض العمليات التى تجرى على الحوادث العشوائية كما يلي:

(أ) اتحاد حادثتين :

تعريف (٤– ٣) :

> اتحاد حادثتين أ ، ب هو حادثة تتضمن كافة نقاط العينة التي تنتمي إلى أ أو ب (أو كليهما) ونرمز له بالرمز أ $\cup$ ب

وذلك يعني وقوع أ أو ب أو كليهما ، أو بمعنى آخر وقوع إحدى الحادثتين أ أو ب على الأقل .
وهذا التعريف يصلح للتعبير عن اتحاد ثلاث حوادث أو أكثر إذ أن اتحاد ن من الحوادث $أ_١$ ، $أ_٢$ ، ٠٠٠ ، $أ_ن$ هو حادثة تتضمن كافة نقاط العينة التى تنتمى إلى واحدة منها على الأقل ونرمز له بـــ :

$$\bigcup_{ر=١}^{ن} أ_ر = أ_١ \cup أ_٢ \cup ٠٠٠ \cup أ_ن$$

(ب) تقاطع حادثتين :

تعريف (٤– ٤) :

> تقاطع حادثتين أ ، ب هو حادثة تتضمن كافة نقاط العينة التى تنتمي إلى أ و ب ونرمز له بالرمز أ $\cap$ ب

أي هي الحادثة التي تتكون من العناصر المشتركة بين أ ، ب وتعني وقوع الحادثتين أ ، ب معاً .
وبالمثل تقاطع ن من الحوادث $أ_١$ ، $أ_٢$ ، ٠٠٠ ، $أ_ن$ هو حادثة تتضمن كافة نقاط العينة التى تنتمى اليها جميعاً ويرمز له بـــ :

$$\bigcap_{ر=١}^{ن} أ_ر = أ_١ \cap أ_٢ \cap ٠٠٠ \cap أ_ن$$

لاحظ أنه عند ربط الحادثتين بالرابط (أو) فإن ذلك يعنى إتحاد الحادثتين وعند ربطهما بالرابط (و) (أو ما يفيد ذلك) فإن ذلك يعنى تقاطعهما .

مثال (١) :

إذا القى حجر نرد مرة واحدة فإن :
ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } فإذا كان :

أ : هى حادثة ظهور عدد زوجي .
ب : هى حادثة ظهور عدد فردي .
ج : هى حادثة ظهور عدد أكبر من ٤
د : هى حادثة ظهور عدد يقبل القسمة على ٣ .
فجد (١) حادثة ظهور عدد زوجي يقبل القسمة على ٣ .
(٢) حادثة ظهور عدد فردى أو عدد أكبر من ٤ .
(٣) حادثة ظهور عدد فردى أو عدد زوجي.
(٤) حادثة ظهور عدد فردى أكبر من ٤ .
(٥) حادثة ظهور عدد زوجى وعدد فردي .

الحل :

من الواضح أن :
أ = { ٢ ، ٤ ، ٦ }
ب = { ١ ، ٣ ، ٥ }
ج = { ٥ ، ٦ }
د = { ٣ ، ٦ }
وبالتالي فإن :
(١) أ ∩ د = { ٦ }
(٢) ب ∪ ج = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٦ }
(٣) ب ∪ أ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }
(٤) ب ∩ ج = { ٥ }
(٥) أ ∩ ب = ∅

(ج) الحوادث المنفصلة أو المتنافية :

تعريف (٤– ٥) :

نقول إن الحادثتين أ ، ب متنافيتان أو منفصلتان
إذا كان تقاطعهما المجموعة الخالية أي أ ∩ ب = ∅

وتنافي حادثتين يعنى أنه لايمكن وقوعهما معاً ، وهذا واضح من عدم وجود أي نقطة عينة مشتركة بينهما أو أن وقوع إحدى الحادثتين ينفي إمكانية وقوع الأخرى كما في الحالة ٥ في المثال السابق .

تمرين (٤– ٣) ؟

(١) تتألف تجربة من قذف حجر نرد ، اكتب فضاء العينة ع ، وحدّد نقاط العينة في كل من الحوادث التالية :

(أ) الحصول على عدد أقل من ٣

(ب) الحصول على ٥

(ج) الحصول على كل من (أ) و (ب)

(د) الحصول على (أ) أو (ب)

(٢) قذف حجر نرد ثم قطعة نقود ، اكتب فضاء العينة ع ثم حدّد نقاط العينة لكل من الحوادث التالية :

(أ) الحصول على عدد زوجي على حجر النرد .

(ب) الحصول على الوجه ص على قطعة النقود .

(ج) الحصول على الوجه ك على قطعة النقود وعدد أقل من ٣ على حجرالنرد .

(د) الحصول على الوجه ص على قطعة النقود ، وعددلا يقل عن ٣ على حجر النرد .

(ه) الحصول على (أ) و (ب)

(و) الحصول على (أ) أو (ب)

(ز) الحصول على واحد على الأقل من الحوادث أ ، ج ، د

(٣) ألقيت قطعة نقود ثم حجر نرد ، وكان :

أ : ظهور صورة وعدد زوجي .

ب : ظهور عدد أولي .

جـ : ظهور كتابة وعدد فردي .

أي من أزواج الحوادث التالية أحداث منفصلة ؟

(أ) أ ، ب

(ب) أ ، جـ

(جـ) ب ، جـ

(د) **الفرق بين حادثتين :**

تعريف (٤–٦) :

الفرق بين حادثتين أ ، ب هو حادثة تتضمن كافة نقاط العينة التي تنتمي إلى أ ولا تنتمي إلى ب ونرمز له بـــ أ – ب ، ويرمز لوقوع أ وعدم وقوع ب .

(هـ) **مكملة الحادثة أ :**

تعريف (٤–٧) :

مكملة أو متممة الحادثة أ هى حادثة تتضمن كافة نقاط العينة التى لا تنتمي إلى أ ويرمز لها بـــ أ ′

نعبر عن أ ′ أحياناً بقولنا (ليس أ) ونلاحظ أن أ ′ = ع – أ ، أي الفرق بين فضاء العينة ع و أ . لاحظ أن الفرق أ – ب هو أ وليس ب ويمكن كتابته على الصورة أ ∩ ب′ .

مثال (١) :

سحبت بطاقة واحدة عشوائياً من صندوق به ٩ بطاقات مرقمة من ١ إلى ٩ وكان

أ هو حدث سحب بطاقة مرقمة بعدد فردي

ب هو حدث سحب بطاقة مرقمة بعدد أولي

أي : أ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ }

ب = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ }

جد نقاط العينة لكل من الحوادث :

أ – ب ، أ ′ ، ب′ ثم عبر عن كل منها لفظياً

الحل :

أ – ب = { ١ ، ٩ } أي حد ث سحب بطاقة مرقمة بعدد فردي غير أولى (أي حدث وقوع أ وعدم وقوع ب)

أ ′ = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } : سحب بطاقة ليس بها رقم فردي أو سحب بطاقة مرقمة بعدد زوجي .

ب′ = { ١ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ٩ } أى حدث سحب بطاقة ليس عليها عدد أولي .

مثال (٢) :

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية عبر عن كل من الأحداث التالية بلغة المجموعات رمزياً :

(١) حدث وقوع أ أو عدم وقوع ب .
(٢) حدث عدم وقوع أ ، ب معاً .
(٣) حدث وقوع أحد الحدثين فقط .
(٤) حدث وقوع أحد الحدثين على الأكثر .

الحل :

(١) حدث وقوع أ أو عدم وقوع ب ≡ أ ∪ ب′

(٢) حدث وقوع أ ، ب ≡ أ ∩ ب

∴ حدث عدم وقوع أ ، ب ≡ (أ ∩ ب)′

(٣) حدث وقوع أحد الحدثين فقط ≡ (حدث وقوع أ وعدم وقوع ب) أو (حدث وقوع ب وعدم وقوع أ)

≡ (أ – ب) ∪ (ب – أ)

≡ (أ ∩ ب′) ∪ (ب∩ أ ′)

(٤) حدث وقوع أحد الحدثين على الأكثر هو نفس حدث عدم وقوعهما معاً

≡ (أ ∩ ب)′ ≡ أ ′ ∪ ب′

تمرين (٤– ٤) ؟

(١) في تجربة رمي قطعة نقود ثلاث مرات متتالية وملاحظة تتابع الصور والكتابات ، اكتب فضاء العينة ع ثم عبّر عن الاحداث التالية بعناصرها :

(أ) حدث الحصول على صورتين فقط .

(ب)حدث الحصول على صورتين على الأقل .

(ج)حدث الحصول على صورتين على الأكثر

(٢) إذا كان أ ، ب حدثين في فضاء العينة لتجربة عشوائية فعبر عن الأحداث التالية رمزياً بلغة المجموعات :

(١)حدث عدم وقوع أ .

(٢)حدث وقوع ب فقط .

(٣)حدث عدم وقوع أ أو وقوع ب .

(٤)حدث وقوع ب أو عدم وقوع أ .

(٥)حدث وقوع أحد الحدثين على الأقل .

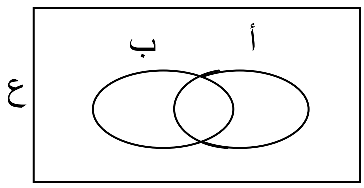
(٦)حدث عدم وقوع أحد الحدثين دون الآخر .

(٣) نفرض أن أ ، ب حدثان ممثلان بشكل فن التالي :

ارسم الشكل (٦ – ١) ثم ظلل عليه كلاً من الاحداث التالية :

(أ) أن يقع أ ولا يقع ب

(ب) وقوع أ أو ب وليس كلاهما



الشكل (٤– ١)

(٤–٦) مسلمات نظرية الاحتمالات :

إذا كان ع فضاء العينة لتجربة عشوائية ، وكان ق (ع) مجموعة جميع الحوادث المعرفة على ع ، فإنه يرافق كل حادثة أ ∋ ق (ع) عدد معين ح (أ) ∋ [٠ ، ١] ويسمى إحتمال الحادثة أ ويتمتع بالخواص التالية : والتى تسمى مسلمات نظرية الاحتمالات :

(١) إذا كانت أ ⊂ ع فإن ح (أ) ≤ ٠

(٢) ح (ع) = ١

(٣) إذا كان أ ، ب حادثتين متنافيتين (أي أ ∩ ب = ∅) فإن :

ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب)

لاحظ أن ح (أ) هو عدد حقيقي يعبر عن إحتمال وقوع الحدث أ . أي احتمال أن يكون ناتج التجربة هو أحد عناصر أ حيث أ ⊂ ع

ومن هذه المسلمات يتضح لنا أن :

(١) احتمال وقوع أي حدث هو عدد حقيقي غير سالب .

(٢) المسلمة (٢) تعني أن احتمال وقوع الحدث المؤكد يساوي ١ .

(٣) المسلمة (٣) يمكن أن نعبر عنها بالصورة الآتية إذا كان أ ∩ ب = ∅

فإن ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) حيث أ ، ب ∋ ق (ع).

وبصورة عامة إذا كان $أ_١$ ، $أ_٢$ ، ‎٠٠٠٠‎ ، $أ_ن$ احداثاً متنافية على مجموعة فضاء العينة ع فإن :

ح ($أ_١$ ∪ $أ_٢$ ∪ ‎٠٠٠‎ ∪ $أ_ن$) = ح ($أ_١$) + ح ($أ_٢$) + ‎٠٠٠‎ + ح ($أ_ن$)

وحيث أن الأحداث الأولية هي أحداث متنافية مثنى مثنى ، إذن يكون احتمال أي حدث = مجموع احتمالات الأحداث الأولية لهذا الحدث .

وحيث أن فضاء العينة لأي تجربة عشوائية يتألف من اتحاد جميع الأحداث الأولية لهذه التجربة ، وحيث أن الاحداث الأولية هي أحداث متنافية مثنى مثنى، عليه نستنتج أن :

مجموع إحتمالات الأحداث الأولية لفضاء العينة لتجربة عشوائية = ١

وباستخدام المسلمات السابقة يمكن التوصل إلى إثبات بعض النظريات .

نظرية (٤– ١) :

إذا كان أ ′ هى الحادثة المتممة للحادثة أ فإن :

ح (أ′) = ١ – ح (أ)

البرهان :

∵ ع = أ ∪ أ ′

∴ ح (ع) = ح (أ ∪ أ ′)

وحيث أن أ ∩ أ ′ = ∅

∴ ح (ع) = ح (أ) + ح (أ ′) مسلمة (٣)

∴ ١ = ح (أ) + ح (أ ′) مسلمة (٢)

∴ ح (أ ′) = ١ − ح (أ)

نتيجة (٤– ١) :

ح (∅) = صفر .

البرهان :

ع′ = ∅

لكن ح (ع ′) = ١ − ح (ع)

∴ ح (ع ′) = ١ − ١ = صفر

∴ ح (∅)= صفر

نظرية (٤– ٢) :

إذا كان أ ⊂ ب فإن :
ح (أ) ≤ ح (ب)

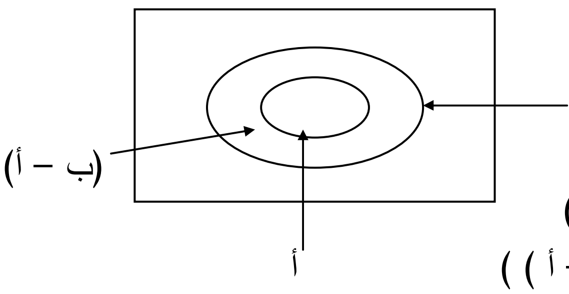
البرهان :

∵ أ ⊂ ب

∴ ب = أ ∪ (ب − أ)
(انظر الشكل (٦ − ٢))

∴ ح (ب) = ح (أ ∪ (ب − أ))

وحيث أن :



الشكل (٤– ٢)

أ ∩ (ب – أ) = ∅ (حدثان متنافيان)

∴ ح (ب) = ح (أ) + ح (ب – أ))   مسلمة (٣)

لكن ح (ب – أ) ≤ ٠ مسلمة (١)

∴ ح (أ) ≥ ح (ب)

نتيجة (٤– ٢) :

ح (أ) ≥ ١ حيث أ أي حادثة في ع

البرهان :

أ ⊃ ع

∴ ح (أ) ≥ ح (ع) (نظرية (٦ – ٢))

ح (أ) ≥ ١

من المسلمة (١) والنتيجة السابقة نستنتج أنه لأي حادثة أ فإن ٠ ≥ ح (أ) ≥ ١

نظرية (٤– ٣) :

> إذا كان أ ، ب حادثتين ، يكون :
>
> ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) – ح (أ ∩ ب)

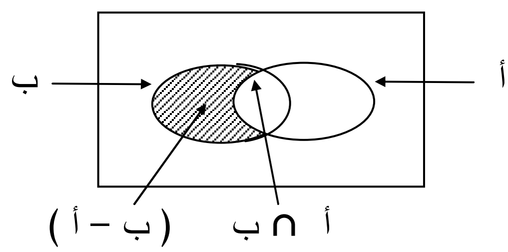
البرهان :

انظر الشكل (٤– ٣)

من الشكل نلاحظ أن :

أ ∪ ب = أ ∪ (ب – أ)

وأن : أ ∩ (ب – أ) = ∅



الشكل (٤– ٣)

∴ ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب − أ) (١)

ولكن ب = (أ ∩ ب) ∪ (ب − أ)

(أ ∩ ب) ∩ (ب − أ) = ∅

ح (ب) = ح (أ ∩ ب) + ح (ب − أ)

ح (ب - أ) = ح (ب) − ح (أ ∩ ب) (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن :

ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) − ح (أ ∩ ب)

مثال (١) :

إذا كان أ ، ب حدثين في تجربة عشوائية ، وكان :

ح (أ) = $\frac{٣}{٥}$ ، ح (ب) = $\frac{١}{٤}$

ح (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٥}$ جد

(أ) ح (أ ′) (ب) ح (ب′)

(جـ) ح (أ ∪ ب) (د) ح (أ − ب)

(هـ) ح (ب − أ) (و) ح (أ ′ ∪ ب)

(ز) ح (أ ∩ ب′) (ح) ح (أ ′ − ب)

الحل :

(أ) ح (أ ′) = ١ − ح (أ) = ١ − $\frac{٣}{٥}$ = $\frac{٢}{٥}$

(ب) ح (ب′) =١ − ح (ب) = ١ − $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٣}{٤}$

(جـ) ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) − ح (أ ∩ ب)

= $\frac{٣}{٥}$ + $\frac{١}{٤}$ − $\frac{١}{٥}$ = $\frac{١٢ + ٥ - ٤}{٢٠}$ = $\frac{١٣}{٢٠}$

(د) ح (أ − ب) = ح (أ) − ح (أ ∩ ب)

(لأن أ = (أ – ب) $\cup$ (أ $\cap$ ب) وهما متنافيان)

$\therefore$ ح (أ – ب) = $\frac{٣}{٥}$ – $\frac{١}{٥}$ = $\frac{٢}{٥}$

(هـ) ح (ب – أ) = ح (ب) – ح (أ $\cap$ ب)

= $\frac{١}{٤}$ – $\frac{١}{٥}$ = $\frac{١}{٢٠}$

(و) ح (أ ′ $\cup$ ب) = ح (أ ′) + ح (ب) – ح (أ ′ $\cap$ ب)

= ح (أ ′) + ح (ب) – ح (ب – أ)

(لأن أ ′ $\cap$ ب = ب – أ)

= $\frac{٢}{٥}$ + $\frac{١}{٤}$ – $\frac{١}{٢٠}$ = $\frac{٣}{٥}$

(ز) ح (أ $\cap$ ب′) = ح (أ – ب) = $\frac{٢}{٥}$

(ح) ح (أ ′ – ب) = ح (أ ′ $\cap$ ب′) = ح (أ $\cup$ ب)′

= ١ – ح (أ $\cup$ ب)

= ١ – $\frac{١٣}{٢٠}$ = $\frac{٧}{٢٠}$

تمرين (٤– ٥)؟

(١) أفرض أن أ ، ب حدثان منفصلان في تجربة عشوائية بحيث أن :

ح (أ) = $\frac{١}{٥}$ ، ح (ب) = $\frac{١}{٣}$

جد احتمال كل من الاحداث التالية :

(أ) أ أو ب (ب) أ و ب

(جـ) أ ′ (د) أ – ب

(هـ) ب − أ　　　(و) أ − ب′

(ز) (أ ∪ ب)′　　　(ح) (أ ∩ ب)′

(٢) في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة إذا كان احتمالات ظهور الأعداد الفردية متساوية وكل منها يساوي $\frac{١}{٩}$ واحتمالات ظهور الأعداد الزوجية متساوية وكل منها يساوى $\frac{٢}{٩}$ ، أي .

$$ح (١) = ح (٣) = ح (٥) = \frac{١}{٩}$$

$$ح (٢) = ح (٤) = ح (٦) = \frac{٢}{٩}$$

جد احتمال كل من الاحداث التالية :

(أ) احتمال ظهور عدد زوجي.

(ب) احتمال ظهور عدد فردي.

(جـ) احتمال ظهور عدد أولى فردي .

(د) احتمال ظهور عدد يقبل القسمة على ٣ .

(هـ) احتمال ظهور عدد زوجي أو أولي .

(و) احتمال ظهور عدد ≥ ٤ .

(٣) أ ، ب حدثان في تجربة عشوائية ، فإذا كان :

$$ح (أ ∪ ب) = \frac{٤}{٥} ، ح (أ) = \frac{١}{٤} ، ح (ب) = \frac{٣}{٥}$$

جد احتمال كل من الاحداث التالية :

(أ) احتمال وقوع أ ، ب معاً .

(ب) احتمال وقوع أ فقط .

(جـ) احتمال وقوع أحد الحدثين فقط .

(د) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر .

(٤) نفرض أن ع = { $أ_١$ ، $أ_٢$ ، $أ_٣$ ، $أ_٤$ } وأن ح دالة احتمال معرفة على ع .

(أ) جد ح($أ_١$) إذا كان ح($أ_٢$) = $\frac{١}{٣}$ ، ح ($أ_٣$) = $\frac{١}{٦}$ ، ح($أ_٤$) = $\frac{١}{٩}$

(ب) جد ح($أ_1$) إذا كان ح ({ $أ_2$ ، $أ_3$}) = $\frac{١}{٣}$ ، ح ({ $أ_2$ ، $أ_4$}) = $\frac{١}{٣}$

ح ($أ_2$) = $\frac{١}{٤}$

(جـ) جد ح ($أ_1$) ، ح ($أ_2$) إذا كان ح ($أ_3$) = ح ($أ_4$) = $\frac{١}{٤}$

وكان ح ($أ_1$) = ٢ ح ($أ_2$)

(٤–٧) الاحتمالات المتساوية :

كثيراً ما توحي الخواص الطبيعية لتجربة ما بأن نواتج فضاء العينة المختلفة لها نفس الاحتمال . وفي هذه الحالة يسمى فضاء العينة المنتهى ع عندما تكون لكل نقطة عينة نفس الاحتمال بالفضاء ذي الاحتمالات المتساوية أو الفضاء المنتظم . فإذا كان الفضاء يحتوي على ن من النقط فإن احتمال كل نقطة هو $\frac{١}{ن}$. ولنفرض أن حادثة أ تتضمن م نقطة عينة فيكون :

$$ح (أ) = \underbrace{\frac{١}{ن} + \frac{١}{ن} + ... + \frac{١}{ن}}_{\text{(م مرة)}} = \frac{م}{ن}$$

أي ح (أ) = $\frac{\text{عدد العناصر في أ}}{\text{عدد العناصر في ع}}$

أو ح (أ) = $\frac{\text{عدد الطرق التى يمكن أن يقع بها الحدث أ}}{\text{عدد الطرق التى يمكن أن يقع بها فضاء العينة}}$

وننبه إلى أن الصيغة السابقة للاحتمال ح (أ) لا تستخدم إلا في حالة الفضاء ذى الاحتمالات المتساوية وعندما نستخدم التعبير " بطريقة عشوائية " نعنى بذلك أن فضاء العينة منتظم ، أي أن لكل نقطة عينة في ع نفس الاحتمال. ويكون ذلك في التجارب التى يتم فيها اختيار عنصر من مجموعة عشوائياً ، أو إلقاء قطعة من النقود عشوائياً ، أو إلقاء حجر النرد المنتظم ، أو سحب ورقة

عشوائياً من اوراق اللعب ، أو سحب كرة من مجموعة كرات متماثلة من صندوق عشوائياً .

مثال (١) :

القي حجر نرد متماثل مرة واحدة فما احتمال ظهور عدد زوجي .

الحل :

ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

حجر النرد متماثل من حيث الأبعاد والكثافة ، لذلك نفترض تساوي احتمال ظهور أي وجه أي :

ح (١) = ح (٢) = ح (٣) = ... = ح (٦) = $\frac{١}{٦}$

فإذا كانت أ حادثة ظهور عدد زوجي

∴ أ = { ٢ ، ٤ ، ٦ }

ويكون ح (أ) = $\frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر ع}}$ = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

مثال (٢) :

ألقي حجرا نرد متمايزان مرة واحدة فما احتمال الحصول على مجموع يساوى ٩

الحل :

نعلم سابقاً أن عدد عناصر فضاء العينة ع في هذه التجربة = ٣٦

أ : حادثة ظهور مجموع يساوي ٩

∴ أ = { (٣ ، ٦) ، (٦ ، ٣) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٤) }

∴ ح (أ) = $\frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر ع}}$ = $\frac{٤}{٣٦}$ = $\frac{١}{٩}$

مثال (٣) :

كيس يحوى ٦ كرات بيضاء و٤ كرات سوداء ، فإذا كانت الكرات جميعها متماثلةوسحبتكرتان عشوائياً جد احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان

(١) بيضاوين (٢) سوداوين (٣) بيضاوين أو سوداوين

الحل :

(١) نفرض أن أ : الكرتان المسحوبتان بيضاوان

ب : الكرتان المسحوبتان سوداوان

المجموع الكلى للكرات = ١٠

∴ عدد الطرق التى يمكن أن يقع بها فضاء العينة

$$= {}^{١٠}ق_{٢} = \frac{١٠ \times ٩}{١ \times ٢} = ٤٥$$

أ : يمكن أن يقع بطرق عددها $${}^{٦}ق_{٢} = \frac{٦ \times ٥}{١ \times ٢} = ١٥$$

ب : يمكن أن يقع بطرق عددها $${}^{٤}ق_{٢} = \frac{٤ \times ٣}{١ \times ٢} = ٦$$

$$\therefore \quad ح\ (\ أ\ ) = \frac{\text{عدد الطرق التي يمكن أن يقع بها الحدث أ}}{\text{عدد الطرق التى يمكن أن يقع بها فضاء العينة}}$$

$$= \frac{١٥}{٤٥} = \frac{١}{٣}$$

(٢)

$$\therefore \quad ح\ (\ ب\ ) = \frac{\text{عدد الطرق التي يمكن أن يقع بها الحدث ب}}{\text{عدد الطرق التي يمكن أن يقع بها فضاء العينة}}$$

$$= \frac{٦}{٤٥} = \frac{٢}{١٥}$$

(٣) نفرض أن جـ: الكرتان المسحوبتان بيضاوان أو سودان

ح(جـ) = ح ((أ $\cup$ ب) = ح(أ) + ح(ب)

أ $\cap$ ب = $\varnothing$

$$\frac{١}{٣} + \frac{٢}{١٥} = \frac{٧}{١٥}$$

مثال (٤) :
مسابقة نجح فيها ١٢ طالباً و ٤ طالبات . تم اختيار الفائزين الثلاثة عشوائياً ، فما احتمال أن يفوز الأولاد بالجوائز الثلاث .

الحل :
$$\text{احتمال فوز الأولاد بالجوائز الثلاث} = \frac{\text{عدد مرات وقوع الحدث}}{\text{المجموع الكلى للاحداث}}$$

$$= \frac{{}^{١٢}ق_{٣}}{{}^{١٦}ق_{٣}} = \frac{١٢ \times ١١ \times ١٠}{١٦ \times ١٥ \times ١٤} = \frac{١١}{٢٨}$$

تمرين (٤– ٦)؟

(١) تتألف تجربة من قذف حجر النرد ، أحسب احتمال كل من الحوادث التالية:
أ : الحصول على ٥ .
ب : الحصول على عدد أقل من ٣.
جـ : الحصول على أ أو ب .
د : الحصول على عدد فردى .
هـ : الحصول على كل من ب و د .

(٢) قذف حجر نرد ثم قطعة نقود ، أحسب إحتمال كل من الحوادث التالية :
أ : الحصول على عدد زوجى على حجر النرد .
ب : الحصول على الوجه ص على قطعة النقود .
جـ : الحصول على الوجه ك من قطعة النقود على عدد أقل من ٣ على حجر النرد .
د : الحصول على أ و ب .
هـ : الحصول على أ و جـ .
و : الحصول على واحد على الأقل من الحوادث أ ، جـ ، د .

(٣) صندوق به ٤ كرات حمر ، ٦ كرات زرق ، ٥ كرات بيض سحبت كرة واحدة من الصندوق بطريقة عشوائية أحسب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة .
(أ) حمراء (ب) بيضاء (جـ) بيضاء أو حمراء
(د) زرقاء أو بيضاء (هـ) حمراء أو زرقاء أو بيضاء

(و) ليست بيضاء (ح) ليست حمراء أو بيضاء
(ط) ليست بيضاء ولا حمراء ولا زرقاء
(٤) اختير عدد من العشرين عدداً الصحيحة الموجبة الأولى بطريقة عشوائية .
أحسب احتمال أن يكون العدد :
(أ) زوجياً أو يقبل القسمة على ٣ .
(ب) فردياً أو يقبل القسمة على ٥ .
(جـ) يقبل القسمة على ٢ أو على ٣ .
(د) لا يقبل القسمة على ٢ أو لايقبل القسمة على ٣ .
(هـ) لايقبل القسمة على ٣ أو زوجياً .

(٤–٨) قانون الاحتمال الثنائي (توزيع ذات الحدين) :

في هذه الحالة يكون تنفيذ التجربة إما أن يؤدي إلى وقوع حادثة معينة نسميها اصطلاحاً " نجاح " باحتمال ح مثلاً ، أو يؤدى إلى عدم وقوع هذه الحادثة أي وقوع فشل باحتمال ف ويساوي (١ – ح) . مثل نجاح طالب أو فشله أو إصابة الهدف أو عدم إصابته أو ظهور الصورة عند إلقاء قطعة النقود أو عدم ظهورها .

فإذا كررنا التجربة بصورة مستقلة ن مرة فإن احتمال الحصول على متتالية محددة من النتائج كل منها إما نجاح وإما فشل ، هو حاصل ضرب ن من الأعداد كل منها ح أو ف حيث نضع ح إذا كانت نتيجة التكرار نجاحاً ونضع ف إذا كانت فشلاً . والسؤال الآن ما هو احتمال الحصول على س نجاحاً عندما نكرر التجربة ن مرة (س $\leq$ ن) .

إن احتمال الحصول على س نجاحاً يعنى أن متتالية نتائج التكرارات الـــ ن يجب أن تتضمن س نجاحاً و (ن – س) فشلاً واحتمال كل متتالية من هذا النوع هو $ح^{س} \; ف^{ن-س}$ (يؤكد ضرب الاحتمالات هنا استقلاليتها كما سنرى في بند (٦ – ١٢) .

ولكن ما عدد هذه الاشكال المختلفة ؟ أي بكم طريقة يمكن أن نكتب متتالية من ن كلمة بحيث تتضمن كلمة نجاح س مرة وتتضمن كلمة فشل (ن – س) مرة . والجـــواب هـــو عدد توافيق ن شيئاً مأخوذة س منها في وقت واحد ، أي ${}^{ن}ق_{س}$

ويكون الاحتمال المطلوب هو :

احتمال الحصول على س نجاحاً $= {}^{ن}ق_{س}\ ح^{س}\ ف^{ن-س}$

$= {}^{ن}ق_{س}\ ح^{س}\ (١ - ح)^{ن-س}$

مثال (١) :

إذا كان احتمال أن يفوز الفريق القومي في مباراة $= \frac{٣}{٥}$ فإذا لعب ٤ مباريات أوجد

أ. احتمال أن يفوز الفريق في ٣ مباريات .

ب. احتمال أن يفوز الفريق في ٣ مباريات على الأقل .

الحل :

أ. احتمال أن يفوز الفريق $= \frac{٣}{٥}$

$\therefore$ احتمال ألا يفوز $= ١ - \frac{٣}{٥} = \frac{٢}{٥}$

ن = ٤

$\therefore$ احتمال الفوز في ٣ مباريات $= {}^{٤}ق_{٣}\ (\frac{٣}{٥})^{٣}\ (\frac{٢}{٥})$

$= \frac{٤ \times ٣ \times ٢}{١ \times ٢ \times ٣} \times (\frac{٣}{٥})^{٣} \times \frac{٢}{٥}$

$= \frac{٢١٦}{٦٢٥}$

احتمال فوزه في ٣ مباريات على الأقل هي احتمال أن يفوز في ٣ مباريات أو أن يفوز في ٤ مباريات

$\therefore {}^{٤}ق_{٣}\ (\frac{٣}{٥})^{٣} \times \frac{٢}{٥} + {}^{٤}ق_{٤}\ (\frac{٣}{٥})^{٤} (\frac{٢}{٥})^{٠}$

$= \frac{٢١٦}{٦٢٥} + \frac{٨١}{٦٢٥} = \frac{٢٩٧}{٦٢٥}$

مثال (٢) :

في مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية تبين أن من بين كل ١٠٠ مصباح يوجد ١٠ مصابيح غير صالحة للاستعمال سحبت عينة عشوائية من ٥ مصابيح. احسب احتمال أن يكون أحد المصابيح المسحوبة غير صالح للاستعمال .

الحل :

احتمال أن يكون المصباح صالحاً = $\frac{٩٠}{١٠٠}$ = ٠,٩

∴ احتمال أن يكون غير صالح ٠,١

ح (أحد المصابيح من العينة غير صالح) = $ق^{٥}_{٤}$ (٠,٩ $)^{٤}$ (٠,١ $)^{١}$

= ٥ × (٠,٩ $)^{٤}$ × ٠,١ = ٠,٣٢٨١٥

تمرين (٤– ٧)

(١) في عائلة بها ٦ أطفال ، إذا كان احتمال ولادة مولود ذكر ٠,٥٢ فما هو احتمال وجود ولد واحد على الأقل في العائلة .

(٢) إذا كان ١٠٪ من انتاج أحد الآت المسامير تالفاً وسحبنا عينة من ٣ مسامير من انتاج هذه الآله . فما احتمال أن يكون :
(أ) من بينها مسماران تالفان .
(ب) كلها تالفة .
(جـ) أقل من مسمارين من بينها تالفان .

(٣) ألقيت قطعة نقود ٥ مرات ، فما هو احتمال ظهور الكتابة مرتين .

(٤) احتمال أن يصيب أحد الرماة الهدف هو ٠,٦ فإذا اطلق ٤ طلقات فما هو :
(أ) احتمال أن يصيب الهدف مرتين تماماً .
(ب) احتمال أن يصيب الهدف مرتين على الأكثر .

(٥) قدرت شركة للطيران أن احتمال وصول الطائرة من مطار جدة إلى مطار الخرطوم في ميعادها هو ٠,٤ ، فإذا أقلعت ٤ طائرات في أحد الأيام أحسب :

(أ) احتمال وصول طائرة واحدة فقط في ميعادها

(ب) احتمال وصول ٣ طائرات في ميعادها

(جـ) احتمال وصول ٣ طائرات على الاقل في ميعادها

(٦) قطعة معدنية صممت بحيث يكون احتمال ظهور الصورة $\frac{٢}{٣}$ فإذا رميت ٤ مرات . جد احتمال ظهور الصورة ثلاث مرات على الأكثر .

(٤–٩) قانون الاحتمال الكلي :

قد مر بنا سابقاً أنه إذا كان أ ، ب حدثين في تجربة ما فإن :

ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) – ح (أ ∩ ب)

ويسمى هذا القانون قانون الاحتمال الكلي أو قانون الجمع . وهو يقول إنه إذا كانت أ ، ب حادثتين فإن إحتمال وقوع واحدة منها على الأقل يساوي مجموع احتمالهما مطروح منه احتمال وقوعهما معاً .

وإذا كانت الحادثتان منفصلتين أي أ ∩ ب = ∅

وبالتالى ح (أ ∩ ب) = ٠

فيصبح القانون كما يلي :

ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب)

وهو ما تقوله المسلمة (٢) من مسلمات الاحتمالات .

مثال (١) :

ألقي حجر نرد مرة واحدة فما احتمال أن يكون العدد على السطح الظاهر يقبل القسمة على ٣ أو ٢ ؟

الحل :

نفرض أن :

أ : حادثة أن العدد الظاهر يقبل القسمة على ٣

ب: حادثة أن العدد الظاهر يقبل القسمة على ٢

وبما أن ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

∴ أ = { ٣ ، ٦ }
ب = { ٢ ، ٤ ، ٦ }
∴ أ ∩ ب = { ٦ }
∴ ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) − ح (أ ∩ ب)

$$= \frac{٢}{٦} + \frac{٣}{٦} - \frac{١}{٦} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$$

مثال (٢) :
القى حجرا نرد متمايزان مرة واحدة ، فما احتمال أن يكون مجموع النقط على السطح العلوي لهما ٤ أو ٩ ؟

الحل :
عدد عناصر فضاء العينة ع = ٣٦
نفرض أن أ هى حادثة أن يكون المجموع ٤
∴ أ = { (١ ، ٣) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ١) }
∴ عدد عناصر أ = ٣
نفرض أن ب حادثة أن يكون المجموع ٩
∴ ب = { (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٤) ، (٦ ، ٣) }
∴ عدد عناصر ب = ٤
أ ∩ ب = ∅
∴ ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب)

$$= \frac{٣}{٣٦} + \frac{٤}{٣٦} = \frac{٧}{٣٦}$$

مثال (٣) :

فصل به أربعون طالباً صنفوا وفقاً لهواياتهم على النحو التالي :

	من هواة الرياضة	ليس من هواة الرياضة
من هواة الموسيقا	٤	١٠
ليس من هواة الموسيقا	٢٠	٦

اخترنا طالباً بصورة عشوائية ، ولتكن أ : حادثة أنه من هواة الموسيقا ، ب : حادثة أنه من هواة الرياضة أحسب :

ح (أ) ، ح (ب) ، ح (أ ∩ ب) ،

ح (أ ∪ ب) ، ح (أ′) ، ح (أ′ ∩ ب)

الحل :

إذا تأملنا الجدول نجد أن :

١٤ طالباً يهوى الموسيقا

$$\therefore \text{ح (أ)} = \frac{١٤}{٤٠} = \frac{٧}{٢٠}$$

وبصورة مماثلة $\text{ح (ب)} = \frac{٢٤}{٤٠} = \frac{٣}{٥}$

ولحساب ح (أ ∩ ب) نلاحظ أن ٤ طلاب فقط من هواة الرياضة والموسيقا معاً

$$\text{فيكون ح (أ } \cap \text{ ب)} = \frac{٤}{٤٠} = \frac{١}{١٠}$$

ولحساب ح (أ ∪ ب) نطبق قانون الاحتمال الكلى فنجد :

$$\text{ح (أ } \cup \text{ ب)} = \frac{٧}{٢٠} + \frac{٣}{٥} - \frac{١}{١٠} = \frac{٧ + ١٢ - ٢}{٢٠} = \frac{١٧}{٢٠}$$

ولحساب ح (أ ′) : أي احتمال ألا يكون من هواة الموسيقا يمكن تطبيق النظرية ح (أ′) = ١ − ح (أ)

$= ١ - \frac{٧}{٢٠} = \frac{١٣}{٢٠}$

أو نحسبه بايجاد عدد الطلاب الذين ليسوا من هواة الموسيقا من الجدول وهم ٢٦ فيكون ح (أ′) = $\frac{٢٦}{٤٠} = \frac{١٣}{٢٠}$

ولحساب ح (أ ′ ∩ ب) وهو احتمال أن يكون الطالب ليس من هواة الموسيقا ومن هواة الرياضة وعددهم ٢٠ فيكون ح (أ ′ ∩ ب) = $\frac{٢٠}{٤٠} = \frac{١}{٢}$

تمرين (٤− ٨)؟

(١) لنفرض أن ح (أ) = ٠,٢ ، ح (ب) = ٠,٣ ، ح (أ ∪ ب) = ٠,٤

أحسب : (١) احتمال وقوع أ و ب

(٢) احتمال حدوث واحدة منها دون الأخرى .

(٣) احتمال عدم وقوع أي منها .

(٢) إذا كان ح (أ) =٠,٢ ، ح (ب) =٠,٤ ، ح (أ ∪ ب) = ٠,٥

أحسب :

ح (أ ∩ ب) ، ح (أ ∩ ب)′ ، ح (أ′ ∩ ب)

ح (أ ∪ ب)′ ، ح (أ′ ∩ ب′) ، ح (أ ∩ ب′)

ح (أ′ ∪ ب′)

(٣) صندوق به عشر بطاقات مرقمة من ١ إلى ١٠ اختيرت منه بطاقة عشوائياً جد :

(أ) احتمال أن يكون رقم البطاقة فردياً .

(ب) احتمال أن يكون رقم البطاقة يقبل القسمة على ٣ .

(جـ) احتمال أن يكون رقم البطاقة يقبل القسمة على ٣ أو على ٥ .

(٤) في تجربة رمي قطعة النرد المنتظمة ، أحسب احتمالات الحوادث التالية .
أ : الحصول على العدد ٤ أو الحصول على عدد يقبل القسمة على ٣ .
ب: الحصول على عدد زوجي أو الحصول على عدد أقل من ٣ .
(٥) يتضمن صندوق ست بطاقات حمراء مرقمة من ١ إلى ٦ ، وكذلك ست بطاقات بيضاء مرقمة من ١ إلى ٦ ، سحبنا بطاقة بصورة عشوائية ، ما احتمال أن تكون :
(أ) حمراء (ب) عليها رقم زوجي
(جـ) حمراء أو عليها رقم زوجي .
(د) ليس حمراء وليس عليها رقم زوجي .
(٦) سحبت ورقة من مجموعة أوراق اللعب (الكوتشينة) فما احتمال أن تحمل الرقم ٣ أو صورة ؟

تذكر أن :

١/ الاحتمالات أحد فروع الرياضيات الذى يهتم بدراسة نتائج التجارب أو المحاولات العشوائية.

٢/ فضاء العينة هو مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية. وتسمى كل نتيجة ممكنة نقطة عينة. وسنرمز لفضاء العينة بالرمز ع .

٣/ الحادثة هي أي مجموعة جزئية من فضاء العينة . وإذا كانت هذه المجموعة الجزئية تحتوى عنصراً واحداً فقط تسمى حادثة بسيطة .

٤/ اتحاد حادثتين أ ، ب هو حادثة تتضمن كافة نقاط العينة التي تنتمي إلى أ أو ب (أو كليهما) ونرمز له بالرمز أ $\cup$ ب.

٥/ تقاطع حادثتين أ ، ب هو حادثة تتضمن كافة نقاط العينة التي تنتمي إلى أ و ب ونرمز له بالرمز أ $\cap$ ب.

٦/ نقول إن الحادثتين أ ، ب متنافيتان أو منفصلتان إذا كان تقاطعهما المجموعة الخالية أي أ $\cap$ ب = $\emptyset$.

٧/ الفرق بين حادثتين أ ، ب هو حادثة تتضمن كافة نقاط العينة التي تنتمي إلى أ ولا تنتمي إلى ب ونرمز له بـ أ – ب ، ويرمز لوقوع أ وعدم وقوع ب .

٨/ مكملة أو متممة الحادثة أ هى حادثة تتضمن كافة نقاط العينة التى لا تنتمي إلى أ ويرمز لها بـ أ $'$.

٩/ مسلمات نظرية الاحتمالات :

١/ إذا كانت أ $\subset$ ع فإن ح (أ) $\leq$ ٠ .

٢/ ح (ع) = ١

٣/ إذا كان أ ، ب حادثتين متنافيتين (أي أ $\cap$ ب = $\emptyset$) فإن :

ح (أ $\cup$ ب) = ح (أ) + ح (ب).

١٠/ ح (أ $'$) = ١ – ح (أ) .

١١/ إذا كان أ $\subset$ ب فإن : ح (أ) $\leq$ ح (ب)

١٢/ إذا كان أ ، ب حادثتين ، يكون :

ح (أ $\cup$ ب) = ح (أ) + ح (ب) − ح (أ $\cap$ ب)

١٣/ في الاحتمالات المتساوية :

$$\text{ح (أ)} = \frac{\text{عدد العناصر في أ}}{\text{عدد العناصر في ع}}$$

$$\text{ح (أ)} = \frac{\text{عدد الطرق التى يمكن أن يقع بها الحدث أ}}{\text{عدد الطرق التى يمكن أن يقع بها فضاء العينة}}$$

الوحدة الخامسة

$$\bar{س} = \frac{س_{١} + س_{٢} + \dots س_{ن}}{ن}$$

الإحصاء

الوحدة الخامسة

الاحصاء

الاهداف :

يتوقع بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون التلميذ قادراً على أن :

١. يتعرف مفهوم الاحصاء.
٢. يتعرف مفهوم الوسط الحسابي.
٣. يتعرف طرق حساب الوسط الحسابي.
٤. يتعرف خصائص الوسط الحسابي.
٥. يتعرف الوسيط.
٦. يتعرف ايجاد الوسيط لبيانات مبوبة في جدول تكراري.
٧. يتعرف خواص الوسيط.
٨. يتعرف ايجاد الربيع الأدنى والربيع الأعلى.
٩. يتعرف مفهوم المنوال.
١٠. يتعرف ايجاد المنوال لقيم مبوبة في جدول تكراري.
١١. يتعرف خواص المنوال.
١٢. يتعرف مفهوم التشتت.
١٣. يتعرف مفهوم الانحراف الربيعي.
١٤. يتعرف ايجاد الانجراف الربيعي.
١٥. يتعرف مفهوم الانحراف المتوسط.
١٦. يتعرف حساب الانحراف المتوسط.
١٧. يتعرف مفهوم الانحراف المعياري.
١٨. يتعرف طرق ايجاد الانحراف المعياري.

الإحصاء

✓(٥– ١) مقدمة ونبذة تاريخية :

لعلم الاحصاء دور متزايد في حياتنا اليومية بحيث أصبح يشغل حيزاً مرموقاً بين بقية العلوم الأخرى . وهو فرع من فروع المنهجية العلمية ، فهو علم النظرية والأسلوب ، ويختص بالطرق العلمية ، لجمع وتنظيم وتلخيص وعرض وتحليل وتفسير البيانات التي تم الحصول عليها بالمسوحات أو بالتجارب الإحصائية . ويهدف علم الإحصاء أساساً إلى الوصول إلى استدلالات عن معالم المجتمع الاحصائى من خلال بيانات العينة العشوائية (التي تمثل المجتمع تمثيلاً صادقاً) كما يهدف إلى تفسير وتوقع الظواهر .

وهو علم تمتد جذوره إلى ما قبل الميلاد بألاف السنين حيث قام قدماء المصريين بعمل تعداد لسكان مصر وثرواتها والأعمال الموسمية فيها واستخدموا نتائج ذلك في تنفيذ بناء الأهرامات ، كما تم تعداد للسكان والأراضي الصالحة للزراعة بهدف إعادة توزيعها على السكان بطريقة عادلة . وفي صدر الاسلام أمر الرسول ﷺ باحصاء المسلمين في المدينة رجالاً ونساء واطفالاً في حديثه (اكتبوا لي ما تلفظ بالاسلام من الناس) . كما قام سيدنا عمر بتنظيم الشئون الادارية للدولة الاسلامية بإنشاء الدواوين التى تحوي سجلات الجند والمواليد والمال .

وفي العصر الذهبى للدولة الاسلامية ، قام الخليفة المأمون باجراء تعداد للسكان والثروات لتحديد الإمكانيات العسكرية للدولة . وفي العصور الوسطى قام الملوك ورؤساء الدول وزعماء القبائل بتعدادات مماثلة .

أما في القرن السابع عشر ، فقد استخدمت الأرقام للدلالة على ما يجمع من معلومات بشكل واسع .

وأطلق على العلم الذى يبحث طرق جمع البيانات الرقمية التى تهم الدولة (علم حساب الدولة) حيث تتناول إحصاءات المواليد والوفيات وعدد السكان ومقدار الثروات والدخول والضرائب وفي الحقيقة فإن كلمة الإحصاء باللغة الانجليزية (Statistics) مشتقة من كلمة (State) وهذا ما يشير إلى أن جمع البيانات كان يهدف إلى خدمة اغراض الدولة ، خاصة العسكرية منها .

وفي اللغة العربية أحصى الشئ عده وهى مأخوذة من الحصاة وهى العقل ، والحصى هو ذو العقل القوى يقول تعالى :

﴿ وَأَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَأَحْصَىٰ كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا ﴾ " الجن : ٢٨"

﴿ لَّقَدْ أَحْصَاهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا ﴾ " مريم : ٩٤ "

﴿ وَإِن تَعُدُّوا نِعْمَةَ اللَّهِ لَا تُحْصُوهَا ۗ إِنَّ اللَّهَ لَغَفُورٌ رَّحِيمٌ ﴾ " النحل : ١٨ "

لقد تطورت العلوم الرياضية خلال القرن الثامن عشر تطوراً سريعاً أدى ذلك إلى تطور مماثل في علم الإحصاء ظهر خلال القرن الثامن عشر والقرن التاسع عشر العلماء الأوائل الذين كان لهم الفضل الأول في تطوير النظريات الإحصائية مثل دانيال برنوللى ، والرياضى الالمانى فردريك جاوس والرياضى الفرنسى لابلاس ، والعالمان الانجليزيان جولتون وكارل بيرسون .

وخلال القرن العشرين تطور الاحصاء ليساير التطور الذي حصل على العلوم الأخرى وتطور المجالات الصناعية والزراعية والتربوية والاقتصادية وغيرها فازدادت الحاجة لإستخدام الطرق الاحصائية في مختلف هذه المجالات، ولعل إعتماد كثير من الدول على التخطيط كاسلوب لرسم السياسات زاد من اهتمامها بالأساليب الاحصائية لجمع وعرض وتفسير بياناتها بشكل يحقق الأهداف المرجوة .

ومن هذا المنطلق يمكننا تعريف علم الأحصاء على النحو التالى :

تعريف :

يعرف الإحصاء بأنه مجموعة الطرق والنظريات العلمية التى تهدف إلى جمع البيانات الرقمية وعرضها ووصفها وتحليلها واستخدام نتائجها في أغراض التنبؤ أو التقرير أو التحقق .

من هذا التعريف نستخلص الأهداف الرئيسة التالية للاحصاء :

(١) جمع البيانات :

حيث يتم جمع البيانات عن الظاهرة المدروسة للوصول إلى النتائج النهائية .

(٢) عرض البيانات :

بعد جمع البيانات عن الظاهرة المدروسة يهدف الإحصاء إلى عرض هذه البيانات بأشكال متعددة كعرضها في جداول تكرارية أو باشكال هندسية أو برسوم بيانية كما سبق وأن درست وذلك لاجراء المقارنات السريعة بين مختلف أوجه الظاهرة التى نقوم بدراستها .

(٣) وصف البيانات :

بعد جمع البيانات وعرضها يهدف الإحصاء إلى دراسة الخصائص الأساسية للظاهرة المدروسة لوصفها وقياسها بمقاييس محددة تعبر عن هذه الخصائص ومن أهم المقاييس المستخدمة لوصف مجموعة من البيانات :

أ. مقاييس النزعة المركزية

ب. مقاييس التشتت .

ج. مقاييس الإلتواء .

د. مقاييس الإعتدال .

وسندرس في هذا الباب بشئ من التفصيل الموضوعين الأولين وهما مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت .

(٤) تحليل البيانات :

بعد وصف البيانات يتم تحليلها واستخلاص النتائج التى أمكن الحصول عليها بصورة علمية للوصول إلى الحقائق المتعلقة بالظاهرة المدروسة .

(٥) إستخدام النتائج :

بعد تحليل البيانات يهدف الإحصاء إلى تفسير البيانات التى تم التوصل إليها تفسيراً منطقياً لإستخدامها في أغراض متعددة كالتنبؤ بالقيم المستقبلية للظاهرة (مثلاً بتعداد سكان جمهورية السودان عام ٢٠٥٠م) .

أو التقرير بإتخاذ قرار معين تجاه مشكلة ما لدرء خطرها أو الإستفادة منها .

(٥– ٢) مقاييس النزعة المركزية :

يحدث في أغلب المجتمعات الإحصائية وفي توزيعاتها التكرارية أن تتراكم (تتمركز) القيم عند نقطة متوسطة ، وهو ما يعرف بظاهرة النزعة المركزية، أي نزعة القيم المختلفة إلى التمركز عند القيمة النموذجية أو الممثلة لمجموعة القيم في التوزيع . ونظراً لأن مثل هذه القيمة تميل إلى الوقوع في

المركز داخل مجموعة البيانات ، لذلك تسمى هذه القيمة بالقيمة المتوسطة أو مقياس النزعة المركزية . آخذين في الاعتبار أنه يوجد عدة أسس لتحديد القيمة المتوسطة ، وبالتالى فيوجد عدة صور لهذه القيمة ، أهمها واكثرها شيوعاً هى : الوسط الحسابي (أو باختصار المتوسط) ، والوسيط ، والمنوال ، وهناك أيضاً الوسط الهندسي والوسط التوافقي – لكنها أقل استعمالاً – ولكل من هذه المتوسطات مزاياه وعيوبه ، وهذا بالطبع يعتمد على البيانات وعلى الهدف من استخدام المتوسط .

الوسط الحسابي :

يعتبر الوسط الحسابي من أبسط وأشهر المتوسطات وأكثرها سهولة في الحساب ويعرف بأنه القيمة التى لو اعطيت لكل مفردة من مفردات المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة هو نفس المجموع الفعلي للقيم الأصلية ، وباختصار فهو القيمة التي تخص كل مفردة لو أن مجموع القيم الأصلية وزع على جميع المفردات بالتساوي . ولذلك يمكن تعريفه رياضياً بأنه : المجموع الجبري لقيم المفردات مقسوماً على عدد هذه المفردات .

وسنوضح فيما يلي طريقة حسابيه :

مثال (١) :

إذا كانت أوزان ثلاثة أولاد بالكيلوجرام هي :

٣٤ كيلوجرام ، ٤٧ كيلوجرام ، ٣٩ كيلوجرام

أحسب الوسط الحسابى لأوزان الأولاد

الحل :

بما أن الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$

∴ الوسط الحسابي = $\frac{٣٤ + ٤٧ + ٣٩}{٣}$

= $\frac{١٢٠}{٣}$ = ٤٠ كيلوجراماً

ولوضع القاعدة العامة لذلك باستخدام الرموز ، إذا فرضا أن القيم الثلاث السابقة هى :

$س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$

وإذا رمزنا للوسط الحسابي بالرمز $\overline{\text{س}}$ (ونقرأ س شرطة) فإن قيمته حسب التعريف هى :

$$\overline{\text{س}} = \frac{\text{س}_{١} + \text{س}_{٢} + \text{س}_{٣}}{٣}$$

أما إذا كان لدينا عدد من القيم وليكن ن وأن القيم هي :

$\text{س}_{١}$ ، $\text{س}_{٢}$ ، $\text{س}_{٣}$ ، ٠٠٠٠٠٠ ، $\text{س}_{\text{ن}}$

فالوسط الحسابى $\overline{\text{س}}$ يكون :

$$\boxed{\overline{\text{س}} = \frac{\text{س}_{١} + \text{س}_{٢} + ٠٠٠ + \text{س}_{\text{ن}}}{\text{ن}}}$$

وإختصاراً في التعبير للوسط الحسابي $\overline{\text{س}}$ نرمز للبسط من الطرف الأيسر أعلاه بالرمز $\sum$ س (ويقرأ مج س) الذى يدل على الجمع حيث :

$$\sum_{\text{ر} = ١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} = \text{س}_{١} + \text{س}_{٢} + \text{س}_{٣} + ٠٠٠٠٠ + \text{س}_{\text{ن}}$$

(ويقرأ $\sum_{\text{ر} = ١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}}$ هكذا مج $\text{س}_{\text{ر}}$ من ر = ١ إلى ر = ن)

أى مجموع $\text{س}_{\text{ر}}$ من ر = ١ إلى ر = ن

وبذلك تصبح الصيغة المبسطة للوسط الحسابي :

$$\boxed{\overline{\text{س}} = \frac{\sum_{\text{ر} = ١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}}}{\text{ن}}}$$

مثال (١) :

فيما يلى درجات ١٠ طلاب حصلوا عليها في امتحان للرياضيات درجته القصوى ٤٠ درجة .

٣٥ ، ٢٤ ، ١٧ ، ٢٩ ، ٣٧ ، ٤٠ ، ٣٨ ، ٣٠ ، ٣٠ ، ٤٠ .

والمطلوب حساب الوسط الحسابي لهذه الدرجات :

الحل :

$$\overline{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر}{ن}$$

$$\therefore \overline{س} = \frac{٣٥ + ٢٤ + ١٧ + ٢٩ + ٣٧ + ٤٠ + ٣٨ + ٣٠ + ٣٠ + ٤٠}{١٠}$$

$$\therefore \overline{س} = \frac{٣٢٠}{١٠} = ٣٢$$

أي ان متوسط درجات الطلاب في ذلك الامتحان ٣٢ درجة .

أما في حساب الوسط الحسابي في حالة البيانات المبوبة فنوضحه بالمثال التالى :

مثال (٢) :

أفترض أنه في أحد المصانع ١٠ عمال يعملون يومياً بالتناوب حسب الاتفاق مع صاحب العمل بحيث يعمل ٣ عمال ٦ ساعات يومياً و٥ عمال ٨ ساعات يومياً وعاملان ٩ ساعات يومياً كما في الجدول أدناه :

ساعات العمل	عدد العمال
٦	٣
٨	٥
٩	٢

أحسب الوسط الحسابي لساعات العمل اليومية للعمال.

الحل :

لحساب الوسط فإنه يجب أولاً حساب مجموع ساعات العمل اليومية في المصنع والناتجة من عمل المجموعات الثلاث من العمال ، فالمجموعة الأولى تتكون من ٣ كل منهم يعمل ٦ ساعات أي أن : ساعات العمل اليومية للمجموعة الأولى = ٣ × ٦ = ١٨

وهي حاصل ضرب عدد العمال في المجموعة الأولى في ساعات العمل. وبالمثل فإن :

مجموع ساعات العمل للمجموعة الثانية = ٥ × ٨ = ٤٠

ومجموع ساعات العمل للمجموعة الثالثة = ٢ × ٩ = ١٨

وبجمع حواصل الضرب نحصل على ساعات العمل اليومية فإذا رمزنا لساعات العمل بالرمز س ، ولعدد العمال أو التكرارات المناظرة بالرمز ك فإن خطوات الحل تكون كما في الجدول التالي :

ساعات العمل س	التكرار ك	ساعات العمل × التكرار ك × س
٦	٣	٦ × ٣ = ١٨
٨	٥	٨ × ٥ = ٤٠
٩	٢	٩ × ٢ = ١٨
المجموع	$\sum$ ك = ١٠	$\sum$ ك × س = ٧٦

ومنه نجد أن :

عدد العمال = $\sum$ ك = ١٠ عمال

مجموع الساعات = $\sum$ ك × س = ٧٦ ساعة

وبالتالى فإن الوسط الحسابي $\bar{س}$ = $\frac{٧٦}{١٠}$ ٧,٦ ساعة

أى أن معادلة الوسط الحسابي تصبح في هذه الحالة :

$$\overline{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر \times س_ر}{\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر}$$

حيث $\sum_{ر=١}^{ن}$ ك $_ر$ س $_ر$ هي مجموعة القيم التي نحـــصل عليها بضرب القيم في التكرارات المناظرة لها .

$\sum_{ر=١}^{ن}$ ك $_ر$ هي عدد القيم أو مجموع التكرارات .

مثال (٣)

اختار أحد الدارسين ٨٠ فصلاً بالمدارس الثانوية بولاية الخرطوم ووجد أن كثافة الطلاب في الفصل موضحة في الجدول التالي :

عدد الطلاب س	٤٨	٥٢	٥٤	٥٨	٦٠	٦٢	٦٤	٦٥	٦٨
عدد الفصول ك	٤	٨	١٢	١٨	١٤	١٠	٧	٤	٣

جد الوسط الحسابى لعدد الطلاب في الفصل

الحل :

لحل المثال نضع هذا الجدول ونضيف إليه عموداً آخر لحساب حاصل ضرب التكرارات في قيم س المناظرة كما يلي :

عدد الطلاب س	عدد الفصول ك	ك × س
٤٨	٤	١٩٢
٥٢	٨	٤١٦
٥٤	١٢	٦٤٨
٥٨	١٨	١٠٤٤
٦٠	١٤	٠٨٤٠
٦٢	١٠	٠٦٢٠
٦٤	٧	٤٤٨
٦٥	٤	٢٦٠
٦٨	٣	٢٠٤
	٨٠	٤٦٧٢

∴ الوسط الحسابي $\overline{س} = \frac{\sum ك\,س}{\sum ك}$

$= \frac{٤٦٧٢}{٨٠} = ٥٨,٤$

مثال (٤) :

متوسط مصروفات أسرة اليومي ٥٠٠ ديناراً ، جد منصرفات هذه الأسرة خلال شهر اكتوبر .

الحل :

لاحظ أن بالقانون $\overline{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر}{ن}$ ثلاثة كميات مجهولة هي الوسط الحسابي $\overline{س}$ ، مجموع المفـــردات $\sum_{ر=١}^{ن} س_ر$ وعدد المفردات ن . إذا

اعطينا اثنين منها يمكن الحصول على المجهول الثالث :
$\bar{س}$ = ٥٠٠ دينار ، ن = ٣١ يوماً

∴ $\sum_{ر=1}^{ن} س_ر$ = ؟

∴ من القانون : $\sum_{ر=1}^{ن} س_ر = \bar{س} \times ن$

= ٥٠٠ × ٣١ = ١٥٥٠٠

∴ منصرفات هذه الأسرة خلال شهر اكتوبر = ١٥٥٠٠ ديناراً .

تمرين (٥ – ١) ؟

(١) جد الوسط الحسابي لإنتاج مزرعة دواجن من البيض إذا كان انتاجها اليومىخلال ١٠ أيام كالآتي :
٥٠٠ ، ٩٠٠ ، ١٢٠٠ ، ٧٢٠ ، ٨٠٠ ، ٦٠٠ ، ١٠٠٠ ، ٩٥٠ ، ٨٥٠ ، ٧٠٠

(٢) إذا كان انتاج خمسة من آبار البترول السودانى ١٠٠٠٠ برميل من البترول الخام ، جد متوسط انتاج البئر الواحدة .

(٣) إذا كان متوسط درجات عدد من التلاميذ ٣٦ درجة جد عدد التلاميذ إذا كان مجموع درجاتهم ٥٤٠ درجة .

(٤) إحدى المصالح الحكومية أخذت عينة مكونة من١٦٠ عاملاً ووجد أن متوسط ساعات العمل اليومية التى يقضونها موضحة في الجدول التالي :

عدد ساعات العمل	٤	٥	٦	٧	٨	المجموع
عدد العمال	٧	٢٨	٦٥	٤٣	١٧	١٦٠

أحسب متوسط ساعات العمل اليومية .

(٥) فصل دراسى به ٤٢ طالباً . جلس منهم ٤٠ طالباً في أحد إمتحانات الرياضيات وتغيب إثنان بسبب المرض فكان الوسط الحسابي لدرجاتهم ٦٧ . وبعد اسبوع تقدم الطالبان اللذان تغيبا للامتحان في المادة نفسها فحصل أحدهما على الدرجة ٤٥ وحصل الثاني على ٩٠ فكم يصبح الوسط الحسابي لدرجات جميع طلاب هذا الفصل.

(٦) مجموعتان من طلاب تتكون المجموعة الأولى من ١٠ طلاب والثانية من ١٢ طالباً أحرز طلاب المجموعة الأولى الدرجات التالية اً × مادة الرياضيات :

٤٠ ، ٥٢ ، ٣٣ ، ٣٥ ، ٣٧ ، ٤٢ ، ٤٤ ، ٣٧ ، ٣٩ ، ٤١ .

وأحرز كل من طلاب المجموعة الثانية الدرجات التالية في مادة الرياضيات:

٤٤ ،٥٠ ، ٦٠ ، ٢٧ ، ٤٩ ، ٤٠ ، ٥٠ ، ٥٦ ، ٤٤ ،٣٠ ، ١٧ ، ٢٣ .

جد الوسط الحسابى لكل مجموعة ، ومن ثم قارن بين مستوى المجموعتين في مادة الرياضيات .

(٧) بمدرسة ثانوية كان متوسط عدد أيام الغياب خلال شهر بالصفوف الأول والثانى والثالث ٤ ، ٥ ، ٣ على الترتيب إذا علمت أن عدد الطلاب في الصفوف الثلاثة هو ٣٠ ، ٢٦ ، ٣٤ على الترتيب فما متوسط عدد ايام الغياب في المدرسة .

(هل المتوسطات تساوي المتوسط العام الذى حصلت عليه ؟)

✓ (٥ – ٣) حساب الوسط الحسابي من جدول تكراري ذى فئات :

إن الفرق بين حساب الوسط الحسابى من جدول تكراري بسيط ومن جدول تكراري فئاته ذات أطوال متساوية هو أننا لا نعرف القيم الأصلية للمفردات في الجدول الثاني . فإذا كان عدد تكرارات الفئة (٠ – ١٠) هو ٧ فإننا لا نعرف القيم الأصلية لكل من المفردات السبعة وبالتالي لا يمكن إيجاد مجموعها كما فعلنا في حالة الوسط الحسابي من الجدول البسيط . لهذا نعتبر بأن كل قيمة من هذه المفردات مساوية لمركز الفئة (متوسط طول الفئة) أي نعطى القيمة ٥ لكل مفردة من المفردات السبعة وبذلك يكون مجموع قيم هذه المفردات ٥ × ٧ = ٣٥ . ونقوم بحساب الوسط الحسابي باعتبار أن قيمة المفردات لكل

فئة هي مركز الفئة . وأن جميع المفردات ضمن الفئة الواحدة نأخذ قيمة تساوي قيمة مركز فئتها ولذلك تتبع الخطوات التالية لإيجاد الوسط الحسابي من الجدول التكراري .

(١) نرسم جدولاً من ثلاثة أعمدة يحتوي عمودة الأول على التكرارات (ك) ، والعمود الثانى يحتوي على مراكز الفئات (م) والعمود الثالث يحتوي على حاصل ضرب التكرارات في مراكز الفئات .

(٢) نوجد حاصل ضرب تكرار كل فئة في مركزها وهي :

$م_١ ك_١$ ، $م_٢ ك_٢$ ، $م_٣ ك_٣$ ، ....

(٣) نجمع حواصل ضرب مراكز الفئات في التكرارات فنحصل على المجموع الكلى لقيم الظاهرة وهو $\sum_{ر = ١}^{ن} م_ر ك_ر$

(٤) نقسم الناتج على التكرارات فنحصل على الوسط الحسابي ، أي :

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر = ١}^{ن} م_ر \, ك_ر}{\sum_{ر = ١}^{ن} ك_ر}$$

مثال (١) :

جد الوسط الحسابي من الجدول التكراري التالي :

الفئات	التكرارات
٠ – ١٠	٣
١٠ – ٢٠	٥
٢٠ – ٣٠	٤
٣٠ – ٤٠	٧
٤٠ – ٥٠	٦

الحل :

ننشئ الجدول ونحسب القيم كما في الجدول أدناه :

التكرارات ك	مراكز الفئات م	م ك
٣	٥	١٥
٥	١٥	٧٥
٤	٢٥	١٠٠
٧	٣٥	٢٤٥
٦	٤٥	٢٧٠
٢٥		٧٠٥

$$\therefore \bar{س} = \frac{\sum م ك}{\sum ك} = \frac{٧٠٥}{٢٥} = ٢٨,٢$$

مثال (٢) :

الجدول التالي يمثل أعمار ١٠٠ عامل في إحدى المؤسسات جد الوسط الحسابي لعمر العامل :

الفئة	١٦-	٢٠-	٢٤-	٢٨-	٣٢-	٣٦-	٤٠-	٤٤-	٤٨-
التكرار	٣	٨	١٢	١٦	٢٥	١٥	١٠	٦	٥

الحل :

التكرار ك	مركز الفئة م	ك م
٣	١٨	٥٤
٨	٢٢	١٧٦
١٢	٢٦	٣١٢
١٦	٣٠	٤٨٠
٢٥	٣٤	٨٥٠
١٥	٣٨	٥٧٠
١٠	٤٢	٤٢٠
٦	٤٦	٢٧٦
٥	٥٠	٢٥٠
١٠٠		٣٣٨٨

$\sum$ ك = ١٠٠ ، $\sum$ ك م = ٣٣٨٨

$$\therefore \overline{س} = \frac{\sum م ك}{\sum ك} = \frac{٣٣٨٨}{١٠٠} = ٣٣,٨٨$$

يمكننا تخفيف العمل الحسابي بدرجة كبيرة ومفيدة بأن نختار وسطاً فرضياً للاعمار (و) مثلاً وهو مركز احدى الفئات المتوسطة ونطرحه من م ونسمى الفرق الانحراف عن الوسط الفرضي . ونلاحظ أن هذه الانحرافات تكون أعداداً صغيرة بعضها سالب وبعضها الآخر موجب ويكون أحدها صغيراً إذا اخترنا مركز إحدى الفئات ليكون هو الوسط الفرضي . ونكتب ذلك في خانة خاصة تحت عنوان ح = م – و .

ثم نضرب كلاً من هذه الانحرافات في تكرار الفئة الخاصة ونكتب ذلك في خانة خاصة تحت عنوان ح × ك وسيكون بعض هذه الحواصل سالباً وبعضها الآخر موجباً وذلك تبعاً للإنحرافات ح نفسها . ونجري عملية الجمع لنحصل على المجموع الجبرى لها ثم نحسب متوسطها بقسمة $\sum$ ح × ك على $\sum$ ك ويكون الوسط الحسابي هو :

$$\overline{س} = و + \frac{\sum ح ك}{\sum ك}$$

ففى المثال السابق إذا اخترنا و = ٣٠ فيكون الجدول كالآتي :

التكرار ك	مركز الفئة م	ح = م – ٣٠	ح × م
٣	١٨	– ١٢	–٣٦
٨	٢٢	–٨	–٦٤
١٦	٢٦	–٤	–٤٨
١٢	٣٠	٠	٠
٢٥	٣٤	٤	١٠٠
١٥	٣٨	٨	١٢٠
١٠	٤٢	١٢	١٢٠
٦	٤٦	١٦	٩٦
٥	٥٠	٢٠	١٠٠
١٠٠			٣٨٨

$$\therefore \bar{س} = ٣٠ + \frac{٣٨٨}{١٠٠} = ٣٠ + ٣,٨٨$$

$$= ٣٣,٨٨$$

مثال (٣) :

أحسب الوسط الحسابي للبيان الاحصائي المصنف في الجدول التالي :

الفئة	٠-	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	المجموع
التكرار	٢	٦	٨	١٨	٢١	١٦	٥	٤	٨٠

الحل :

إذا أردنا حل هذا المثال مستخدمين الوسط الفرضي يمكن أن نختار ٢٢,٥ كوسط فرضي :

مركز الفئة م	التكرار ك	ح = م – و	ح × ك
٢,٥	٢	٢٠-	٤٠-
٧,٥	٦	١٥-	٩٠-
١٢,٥	٨	١٠-	٨٠-
١٧,٥	١٨	٥-	٩٠-
٢٢,٥	٢١	٠	٠
٢٧,٥	١٦	٥	٨٠
٣٢,٥	٥	١٠	٥٠
٣٧,٥	٤	١٥	٦٠
	٨٠		١١٠ -

$$\sum ك = ٨٠ \qquad \sum ح \times ك = -١١٠ \text{ ، } و = ٢٢,٥$$

$$\therefore \bar{س} = و + \frac{\sum ح \times ك}{\sum ك} = ٢٢,٥ + \frac{\overline{١١٠}}{٨٠}$$

$$= ٢٢,٥ + (\overline{١,٣٧٥}) = ٢١,١٢٥$$

خصائص الوسط الحسابي :

الوسط الحسابي من أكثر مقاييس النزعة المركزية إستعمالاً لاتصاله بالخصائص التالية :

(١) وضوح معناه وتعريفه وسهولة حسابه .

(٢) تأثره بجميع قيم الأعداد الموجودة في المجتمع الاحصائي وخضوعه للعمليات الجبرية .

أما من عيوبه أنه مضلل وخاصة في الحالات التى تحتوي فيها المجموعة الاحصائية على بعض القيم المتطرفة بالكبر الشديد أو الصغر الشديد .

تمرين (٥ – ٢)

(١) الجدول التالي يوضح سنوات الخبرة لمعلمي المرحلة الثانوية بإحدى الولايات . احسب الوسط الحسابي للخبرة .

الفئات (الخبرة)	٠-	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-
عدد المعلمين (التكرار)	٢٥	١٨	٣٢	٢٠	١٤	١١

(٢) الجدول التالي يمثل التوزيع التكراري للدرجات التي حصل عليها ٦٥ تلميذاً في أحد الاختبارات

الفئات الدرجات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-	المجموع
التكرارات	٢	٥	٨	١٠	١٨	٩	٧	٤	٢	٦٥

مستخدماً طريقة الوسط الفرضي أحسب متوسط درجات هذا الفصل .

(٣) فيما يلي التوزيع التكراري للأجور اليومية لعدد من العاملين باحدى المؤسسات :

الفئات الأجور بالدينار	٦٠-	١٢٠-	١٨٠-	٢٤٠-	٣٠٠-	المجموع
عدد العاملين	٣	٥	٢٠	١٠	١٢	٥٠

أحسب متوسط أجور العاملين اليومية

(٤) احسب الوسط الحسابي من الجدول التكراري التالي :

الفئات	٠-	٥-	١٠-	١٥-	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-
التكرارات	٢	٦	٨	١٦	٢٣	١٦	٧	٢

(٥) مستخدماً الوسط الفرضي جد الوسط الحسابي من الجدول التالي :

الفئات	٠-	٤-	٨-	١٢-	١٦-	٢٠-	٢٤-	٢٨-	٣٢-
التكرارات	١	٢	٢	١٠	١٧	١٢	٣	٢	١

(٥ – ٤) الوسيط :

الوسيط هو القيمة أو المفردة التي تتوسط المفردات حينما نرتبها ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً . وهذه المفردة يكون عدد المفردات الأكبر منها يساوي تماماً عدد المفردات الأصغر منها ، وبناء على هذه الخاصية يمكن إعتبار الوسيط متوسطاً يمثل المجموعة كلها تمثيلاً عادلاً .

ويمكن الحصول على الوسيط بيانياً أو حسابياً . فلإيجاد الوسيط لبيانات غير مبوبة في توزيع تكراري حسابياً نقوم بترتيب القيم تصاعدياً أو تنازلياً ونحدد ترتيب القيمة الوسيطية . وتحديد ترتيب الوسيط يعتمد على عدد القيم ن حيث يكون هنالك وسيط واحد إذا كان ن عدداً فردياً وترتيبه هو $\frac{ن + ١}{٢}$. ويكون هنالك وسيطين إذا كان ن عدداً زوجياً ترتيبهما $\frac{ن}{٢}$ ، $\frac{ن}{٢} + ١$ ونحصل على الوسيط في هذه الحالة بجمع الوسيطين ويقسم الناتج على ٢ . ويتضح في الحالة الأخيرة أن الوسيط هو قيمة قد لايكون لها وجود فعلي في المجموعة ولكنها تؤدي معنى خاصاً هو المعنى الموجود في تعريف الوسيط . ويرمز للوسيط عادة بالرمز ط .

مثال (١) :

لدينا مجموعة القياسات :

٧ ، ٢ ، ٩ ، ١٦ ، ١٠ ، ٤ ، ٨ . ما هو الوسيط ؟

الحل :

نرتب هذه القيم من الاصغر إلى الأكبر فنجد

٢، ٤ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١٦

ولما كان عدد القياسات ٧ وهو عدد فردي فيكون الوسيط هو القياس الذي ترتيبه

$$\frac{٧ + ١}{٢} = ٤$$

أي العدد الرابع مبتدئين بالترتيب من العدد الأول ٢ أي أن الوسيط هو ٨ .

مثال (٢) :

لدينا مجموعة القياسات :

١٢ ، ٢١ ، ٨ ، ١٧ ، ٢٥ ، ١٨ ، ٩ ، ٣١

ما هو الوسيط ؟

الحل :

نرتب الأعداد فنجد :

٨ ، ٩ ، ١٢ ، ١٧ ، ١٨ ، ٢١ ، ٢٥ ، ٣١

وبما أن عدد القياسات ن = ٨ زوجي

نأخذ متوسط العددين الذين ترتيبهما $\frac{٨}{٢}$ ، $\frac{٨}{٢}$ + ١ .

أى ٤ ، ٥ .

ولكن العدد الرابع هو ١٧ ، العدد الخامس ١٨

$$\therefore \text{الوسيط}\quad ط = \frac{١٧ + ١٨}{٢} = ١٧,٥$$

إيجاد الوسيط لبيانات مبوبة في جدول تكراري :

في حالة البيانات المبوبة في الجدول التكراري لإجراء مرحلة الترتيب التصاعدى أو التنازلي لابد من تحويل الجدول التكراري إلى جدول التكرار المتجمع الصاعد أو المتجمع النازل . علماً أن مجموع التكرارات المقابلة لجميع القيم الأقل من الحد الأعلى لفئة معينة يسمى بالتكرار المتجمع لهذه الفئة والمتضمن تكرارها أيضاً ومثل هذا التوزيع يسمى التوزيع المتجمع الصاعد أي التوزيع المتجمع على أساس (الأقل من) . في حين يسمى التوزيع التكراري المتجمع لجميع القيم الأكبر من أو المساوية للحد الأول لكل فئة بالتوزيع المتجمع النازل أي على أساس (الأكثر من).

أي في حالة تكوين التوزيع المتجمع الصاعد نأخذ الفئات على أساس (الأقل من) الحد الأعلى لكل فئة ثم نجمع تكرارات الفئات جمعاً تراكمياً . بينما لتكوين التوزيع المتجمع النازل – نأخذ الفئات على أساس (الأكثر من) الحد الأول للفئة ، ثم نقوم بطرح تكرار كل فئة طرحاً متتابعاً .

فالمثال التالي يوضح تكوين الجدولين المتجمع الصاعد والمتجمع النازل للجدول التكراري التالي .

٠-	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-
٥	١٢	١٧	٢٤	١٨	١١	٩	٤

المتجمع الصاعد

ولإيجاد الوسيط لمجموعة من القيم الموزعة في جدول تكراري ذى فئات فإننا نوجد التكرار المتجمع الصاعد أولاً ومنه نعرف موقف ترتيب الوسيط بين هذه التكرارات المتجمعة على أساس أن ترتيب الوسيط هو نصف عدد المفردات أى نصف مجموع التكرارات . ومتى عرفنا موقع ترتيب الوسيط يمكننا معرفة الفئة التى يقع الوسيط نفسه بين حديها الأدنى والأعلى .

الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ١٠	٥
أقل من ٢٠	٥ + ١٢ = ١٧
أقل من ٣٠	١٧ + ١٧ = ٣٤
أقل من ٤٠	٣٤ + ٢٤ = ٥٨
أقل من ٥٠	٧٦
أقل من ٦٠	٨٧
أقل من ٧٠	٩٦
أقل من ٨٠	١٠٠

المتجمع النازل

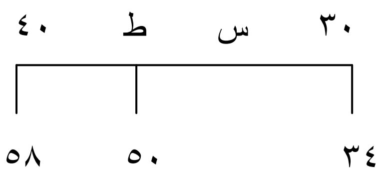
الحدود الدنيا للفئات	التكرار المتجمع النازل
أكثر من ٠	١٠٠
أكثر من ١٠	١٠٠ – ٥ = ٩٥
أكثر من ٢٠	٩٥ – ١٢ = ٨٣
أكثر من ٣٠	٨٣ – ١٧ = ٦٦
أكثر من ٤٠	٤٢
أكثر من ٥٠	٢٤
أكثر من ٦٠	١٣
أكثر من ٧٠	٤
أكثر من ٨٠	٠

فترتيب الوسيط في الجدول السابق = $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠

وبالنظر إلى جدول التكرار المتجمع الصاعد نجد أن الترتيب ٥٠ يقع بين التكرارين ٣٤ و ٥٨ فهو أكبر من ٣٤ وأقل من ٥٨ وهذا معناه أن الوسيط بين ٣٠ و ٤٠ أي أكبر من ٣٠ وأقل من ٤٠ . وعليه فإن فئة الوسيط هى ٣٠ وأقل من ٤٠

أى أن الوسيط ط = ٣٠ + س

ولتحديد قيمة س يمكن تطبيق نظرية التناسب البسيط حيث نعتبر أن قيمة الوسيط تقع بين ٣٠ و ٤٠ بنفس النسبة التى يقع بها ترتيب الوسيط بين التكرارين ٣٤ و ٥٨ . وبالإستعانة بالشكل الهندسي التالي :



يمكن حساب قيمة س بالتقسيم التناسبي كما يلي :

$$\frac{\text{س}}{\text{٤٠} - \text{٣٠}} = \frac{\text{٥٠} - \text{٣٤}}{\text{٥٨} - \text{٣٤}}$$

أي $\frac{\text{س}}{\text{١٠}} = \frac{\text{١٦}}{\text{٢٤}}$ فتكون س = $\frac{\text{١٦}}{\text{٢٤}} \times \text{١٠}$

$$\frac{\text{٢٠}}{\text{٣}} = \text{٦}\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$$

$$\text{ط} = \text{٣٠} + \text{س} = \text{٣٠} + \text{٦}\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$$

$$\therefore \text{ط} = \text{٣٦}\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$$

ومن حل هذا المثال يمكن أن نستنتج معادلة رياضية لربط العناصر المستخدمة في الحل . وهذه العناصر هي ترتيب الوسيط $\frac{\text{ن}}{\text{٢}}$ ، طول الفئة ف ، الحد الأول لفئة الوسيط $\text{هـ}_{\text{١}}$ ،التكرار المتجمع المناظر للحد الأدنى لفئة الوسيط ويسمى بالتكرار المتجمع السابق $\text{ك}_{\text{١}}$ ،التكرار المتجمع المناظر للحد الأعلى لفئة الوسيط ويسمى بالتكرار المتجمع اللاحق $\text{ك}_{\text{٢}}$
وهذه العناصر يمكن ربطها بالمعادلة التالية :

$$\text{الوسيط} = \text{بداية فئة الوسيط} + \frac{(\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار المتجمع السابق})}{\text{التكرار المتجمع اللاحق} - \text{التكرار المتجمع السابق}} \times \text{طول الفئة}$$

أو $ط = هـ_1 + \dfrac{\frac{ن}{٢} - ك_1}{ك_2 - ك_1} \times ف$

تلاحظ أن $ك_2 - ك_1$ = تكرار الفئة الوسيطية .

مثال (١) :

أحسب الوسيط من الجدول التكراري التالي :

الفئة	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	٥٥-	المجموع
التكرار	٣	٦	٨	١٥	٢٥	١٢	٨	٣	٨٠

الحل :

نكون الجدول التكراري المتجمع الصاعد :

الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٢٥	٣
أقل من ٣٠	٩
أقل من ٣٥	١٧
أقل من ٤٠	٣٢
أقل من ٤٥	٥٧
أقل من ٥٠	٦٩
أقل من ٥٥	٧٧
أقل من ٦٠	٨٠

ترتيب الوسيط = $\dfrac{٨٠}{٢}$ = ٤٠

فئة الوسيط = ٤٠ – ٤٥ وطولها = ٥

التكرار المتجمع السابق = ٣٢

التكرار المتجمع اللاحق = ٥٧

$$\therefore \text{من المعادلة } ط = ٤٠ + \frac{٤٠ - ٣٢}{٥٧ - ٣٢} \times ٥$$

$$= ٤٠ + \frac{٨}{٥} = ٤١,٦$$

وباتباع الإسلوب نفسه يمكننا إيجاد القيم التي تقسم مجموعة البيانات إلى أكثر من مجموعتين متساويتين في العدد . فالقيم التي تقسم المجموعة إلى أربعة أجزاء متساوية ويرمز لها بالرمز $ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٣$ وتسمى الربيع الأول والربيع الثاني والثالث ، علماً أن الربيع الثاني هو الوسيط .

والربيع الأول يعرف بالربيع الأدنى ويرمز له أحياناً بالرمز $ر_١$ والربيع الثالث بالربيع الأعلى ويرمز له بالرمز $ر_٢$ أحياناً .

ويمكن تحديد الربيع بنفس الطريقة التى حسبنا بها الوسيط وذلك بتحديد ترتيب الربيع المطلوب ، ثم تحديد الفئة التى يقع الربيع بين حديها ثم تقسيم الفترة أو المسافة بين حدي الفئة بالضبط كما فعلنا في حساب قيمة س في الوسيط .

وفي المجموعات الكبيرة قد نحتاج إلى استخدام تقسيمات أدق من الارباع الاربعة ، فنقسم المجموعة إلى عشرة أعشار ويسمى كلاً منها العشير ، فتكون العشير الأول والثاني و ... والتاسع . وقد تقسم إلى مائة جزء وتسمى المئينات . ولا شك أن العشير الخامس والمئين الخمسين يساويان الوسيط أما المئينتين الخامس والعشرون ، والخامس والسبعون فيساويان الربيعين الأول والأعلى على التوالي .

مثال (٢)

مستخدماً الجدول في المثال (١) جد الربيعين الأدنى والأعلى .

الحل :

ترتيب الربيع الأدنى = $\frac{٨٠}{٤} = ٢٠$

وهو يقع بين ١٧ ، ٣٢

$\therefore$ فئة الربيع الأدنى = ٣٥ – ٤٠ وطولها ٥

التكرار المتجمع السابق = ١٧ والتكرار المتجمع اللاحق = ٣٢

∴ الربيع الادنى ع$_{1}$ = ٣٥ + $\frac{٢٠ - ١٧}{٣٢ - ١٧}$ × ٥

= ٣٥ + ١ = ٣٦

وبالمثل ترتيب الربيع الأعلى = ٨٠ × $\frac{٣}{٤}$ = ٦٠

∴ فئة الربيع الأعلى = ٤٥ – ٥٠

التكرار المتجمع السابق = ٥٧

التكرار المتجمع اللاحق = ٦٩

∴ الربيع الأعلى ع$_{3}$ = ٤٥ + $\frac{٦٠ - ٥٧}{٦٩ - ٥٧}$ × ٥

= ٤٥ + ١,٢٥ = ٤٦,٢٥

خواص الوسيط :

يتميز الوسيط بأنه غير مضلل في حالة وجود قيم متطرفة ؛ لأن قيمته تتعين بموقعها بين القيم وليس بإضافة القيم إلى بعضها كما في حالة الوسط الحسابي . ومن ميزاته أنه يمكن إيجاده بالرسم . إلاّ أن طريقة حسابه أكثر صعوبة من الوسط الحسابي .

تمرين (٥ – ٣)

(١) جد الوسط الحسابي والوسيط للمفردات التالية :

٤٢,٤ ، ٢٧,٥ ، ٢١,٢ ، ٢٦,٦ ، ٢٨ ، ٣٣,٨ ، ٤٢,٨ ، ٥٠,٢ ، ٥٠,٨ ، ٤١,٦

(٢) أحسب الوسيط والربيعين الأدنى والأعلى من الجدول التكراري التالي :

الفئات	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	٥٥-	٦٠-	المجموع
التكرارات	٣	٩	١٣	١٦	٢٠	١٥	١٣	٨	٣	١٠٠

(٣) الدرجات التالية في الجدول التكراري تمثل درجات ١٢٠ تلميذاً في امتحان العلوم ، جد :

الوسط الحسابي والوسيط لها .

الفئات	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-	المجموع
التكرارات	١	٣	١١	٢١	٤٣	٣٢	٩	١٢٠

(٤) الجدول التالي يوضح توزيع دخول عدد من الأسر بآلاف الدينارات :

الفئات	٠-	٤-	٨-	١٢-	١٦-	٢٠-	٢٤-
التكرارات	٧	٨	٩	١٤	٣٢	١٨	١٢

المطلوب حساب متوسط الدخول باستخدام الوسيط مرة ثم باستخدام الوسط الحسابي مرة أخرى .

(٥) أحسب الوسيط في كل من الجداول التكرارية التالية :

(أ)

الفئات	١٣-	٢٠-	٢٧-	٣٤-	٤١-	٤٨-
التكرارات	٦	١٥	٤٠	٤٩	٢٨	١٢

(ب)

الفئات	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-	٣٠-	٣٤-	٣٨-
التكرارات	٢	٨	١٢	١٨	٩	٨	٣

(جـ)

الفئات	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-	٣٠-	٣٤-
التكرارات	٢	٦	١١	١٨	١٣	٧	٣

(د

الفئات	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	٥٥-
التكرارات	٤	٩	١٣	١٧	٢٠	١٥	١٤	٨

(٥- ٥) المنوال :

يستخدم المنوال مقياساً من مقاييس النزعة المركزية ليعكس النمط العام أو النموذج الغالب للظاهرة . فهو المتوسط الذى تتوفر فيه هذه الخاصية دون المتوسطات الأخرى ويعرف بأنه أكثر القيم شيوعاً ، أي أنه القيمة الأكثر تكراراً في مجموعة من المفردات .

وتظهر أهمية المنوال كمتوسط في بعض التطبيقات العلمية التى نجد فيها أن توفر صفة الشيوع والتكرار تخدم أغراض البحث . فإذا أردنا تحديد الطول المتوسط الذى سينتج على أساسه مصنع الملبوسات الجاهزة فإننا نجد أن تحديد الطول المناسب لا يمكن حسابه على أساس الوسط الحسابى أو الوسيط الذى يظهر الطول الغالب من الاشخاص (الرجال أو النساء أو الاطفال) أي الطول الأكثر تكراراً أو شيوعاً ، ولذلك تضمن إلى حد كبير أن الملابس المنتجة سوف تتناسب من حيث المقاس مع أكبر عدد من السكان .

مثال (١) :

جد المنوال للمفردات الآتية :

٤ ، ٥ ، ٢ ، ٧ ، ٥ ، ٩ ، ١٠ ، ٣ ، ٧ ، ٨ ، ٥ ، ٥ ، ٩ ، ٢ ، ٦ ، ٥

الحل :

نلاحظ أن المفردات ٥ هى أكثر المفردات تكراراً

∴ المنوال لهذه المجموعة يساوي ٥

مثال (٢) :

الجدول التالي يبين توزيع عينة من الأسر حجمها ٢٠٠ أسرة حسب عدد أفرادها . احسب متوسط عدد أفراد الأسرة الأكثر شيوعاً باستخدام المنوال .

عدد افراد الأسرة	عدد الأسر
١	٢٠
٢	٣٠
٣	٤٥
٤	٥٠
٥	٣٠
٦	٢٥

الحل :

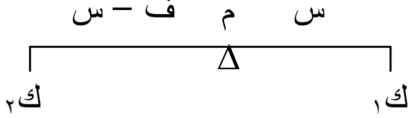
لتحديد قيمة المنوال نبحث عن عدد افراد الأسرة الأكثر تكراراً فنجد أنه ٤ تكرر في ٥٠ أسرة ، لذا فإن قيمة المنوال هو ٤ . وذلك يعني أن عدد أفراد الأسرة الأكثر غالبية هو أربعة اشخاص .

المنوال لقيم مبوبة في جدول تكرارى :

عندما تكون البيانات في جدول تكراري فإن الفئة ذات التكرار الأكبر تحتوي على مفردات عددها أكبر من عدد المفردات الواقعة في أي واحدة من الفئات الأخرى بالطبع . وعلى إعتبار أن مركز الفئة يمثل جميع المفردات التى تقع في الفئة يتضح أن مركز الفئة ذات التكرار الأكبر هو القيمة الأكثر شيوعاً أو القيمة ذات التكرار الأكبر بين مفردات المجموعة التي يمثلها الجدول التكراري أي هي المنوال .

إذن في الجدول يكون المنوال هو مركز الفئة ذات التكرار الأكبر وتسمى هذه الفئة بالفئة المنوالية للجدول التكراري .

وهناك طرق أخرى لتحديد موقع المنوال بدقة داخل الفئة المنوالية وذلك بتقسيم المسافة بين الحدين الأدنى والأعلى لهذه الفئة تقسيماً تناسبياً باستخدام تكرارى الفئتين المحيطتين بالفئة المنوالية لإجراء هذا التقسيم . وبغرض أن المنوال م يبعد مسافة س من الحد الأدنى للفئة المنوالية ولمعرفة مقدار س نفترض أن لدينا رافعة في طرفها الأيمن قوة تكرار الفئة قبل المنوالية $ك_1$ وفي طرفها الأيسر قوة تساوى تكرار الفئة بعد المنوالية $ك_2$ وفيها م نقطة ارتكاز على بعد س من طرفها الأيمن . وعلى بعد (ف – س) من طرفها الأيسر حيث ف طول الفئة.



أي $ك_1$ س = $ك_2$ (ف – س)

ونعرف هذه الطريقة بطريقة الرافعة .

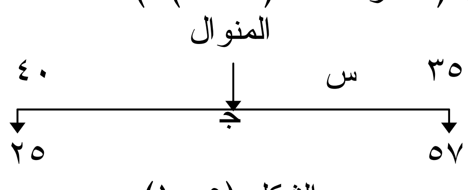
وثمة طريقة أخرى لحساب س بدقة أكبر تسمى طريقة بيرسون وفيها يكون التقسيم على أساس فروق التكرارات بين الفئة المنوالية والتي قبلها والتي بعدها . بدلاً من التكرارات نفسها
فإذا كان تكرار الفئة المنوالية كَ يكون :

$$\frac{\text{س}}{\text{ف} - \text{س}} = \frac{\text{كَ} - \text{ك}_{١}}{\text{كَ} - \text{ك}_{٢}}$$

مثال (١) :
الجدول التكراري التالي يبين قياسات الملابس لعينة من ٢٠٠ شخصاً

القياسات	التكرارات
٢٠ – ٢٥	٩
٢٥ – ٣٠	٤٨
٣٠ – ٣٥	٥٧
٣٥ – ٤٠	٦١
٤٠ – ٤٥	٢٥

والمطلوب معرفة نمط القياس الأكثر شيوعاً لدى افراد هذه العينة (المنوال) ، مستخدماً الطرق الثلاثة
الحل :
لحساب المنوال نتبع الخطوات التالية :
(١) نجد الفئة المنوالية وهي الفئة الاكثر تكراراً وتساوي في هذا الجدول (٣٥ – ٤٠) .
(٢) يمكن إعتبار أن مركزها وهو ٣٧,٥ هو المنوال بصورة تقريبية .
(٣) ولكن لتحديد المنوال بدقة أكثر يمكن استخدام قانون الرافعة بفرض أن المنوال عند جـ (انظر الشكل (٨ – ١))



الشكل (٥– ١)

وهو متجاذب بين التكرار الذى يسبق تكرار الفئة المنوالية والتكرار الذى يلى الفئة المنوالية .

∴ المنوال = ٣٥ + س

∴ يمكن حساب س من المعادلة

٥٧ س = ٢٥ (٥ – س)

٥٧ س = ١٢٥ – ٢٥ س

٨٢ س = ١٢٥

$$س = \frac{١٢٥}{٨٢} = ١,٥٢$$

∴ المنوال = ٣٥ + ١,٥٢ = ٣٦,٥٢ (مقرب لمنزلتين)

أما إذا استخدمنا طريقة بيرسون فنجد أن :

$$\frac{س}{٥ - س} = \frac{٦١ - ٥٧}{٦١ - ٢٥} \Leftarrow \frac{س}{٥ - س} = \frac{٤}{٣٦}$$

∴ ٩ س = ٥ – س

١٠ س = ٥

س = ٠,٥

∴ المنوال = ٣٥,٥

مثال (٢) :

الجدول التالي يمثل قياسات نزول المطر في مدينة الدويم خلال ١٠٠ يوماً مقاسه بالملم . أحسب المنوال : مستخدماً طريقتي الرافعة وبيرسون .

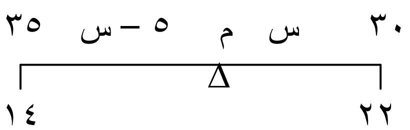
الفئات	١٠–	١٥–	٢٠–	٢٥–	٣٠–	٣٥–	٤٠–	٤٥–	المجموع
عدد الأيام	٣	٧	١١	٢٢	٢٧	١٤	٩	٧	١٠٠

الحل :

من هذا التوزيع التكراري نجد أن الفئة المنوالية ٣٠ – بفرض أن المنوال م = ٣٠ + س

س جزء من طول الفئة

طول الفئة = ٣٥ – ٣٠ = ٥
تكرار الفئة قبل المنوالية ٢٢ والتكرار بعدها ١٤
لايجاد قيمة س يمكن الاستفادة بشكل الرافعة بالشكل (٩ – ٢)



الشكل (٨ – ٢)

∴ ٢٢ س = ١٤ (٥ – س)
٢٢ س = ٧٠ – ١٤ س
٣٦ س = ٧٠

∴ س = $\frac{٧٠}{٣٦}$ = ١,٩٤

∴ المنوال = ٣١,٩٤
أما إذا استخدمنا طريقة بيرسون سنجد أن :

$\frac{\text{س}}{\text{٥ – س}} = \frac{٢٧ - ٢٢}{٢٧ - ١٤}$

$\frac{\text{س}}{\text{٥ – س}} = \frac{٥}{١٣}$

١٣ س = ٢٥ – ٥ س
١٨ س = ٢٥

س = $\frac{٢٥}{١٨}$ = ١,٣٩

أي المنوال ٣١,٣٩

خواص المنوال :

(١) يمثل المنوال المقياس الأكثر تعبيراً عن توزيع بعض البيانات .
(٢) لا تتأثر قيمة المنوال بالقيم المتطرفة .
(٣) قد يكون في التوزيع الواحد أكثر من منوال

تمرين (٥– ٤)

(١) احسب الوسيط والمنوال لكل من القياسات التالية :

(أ) ٢ ، ١ ، ٥ ، ¯١، ٤ ، ٣ ، ٦ ، ٣ ، ¯٢ ، ٣ ، ٥
(ب) ١ ، ١ ، ٢ ، ١ ، ٣ ، ١ ، ١ ، ٢ ، ٢ ، ١
(جـ) ١٧,١ ، ١٦,٤ ، ١٧,٥ ، ١٦,٩ ، ١٧,٢

(٢) المعلومات التالية مأخوذة من سجل لغياب العاملين في أحد المؤسسات خلال شهر يناير .

عدد أيام الغياب	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
التكرار	٥	١٥	٢٣	٢٢	١٦	١٠	٦	٣

أحسب (أ) متوسط عدد أيام الغياب .
(ب) الوسيط لعدد أيام الغياب .
(جـ) المنوال لعدد أيام الغياب .

(٣) الجدول التالي يوضح العمر الزمني بالأسبوع بالنسبة إلى ٢٠٠ مصباح كهربائي أخذت كعينة من أحد المصانع .

العمر بالاسبوع	٢٦–	٣٠–	٣٤–	٣٨–	٤٢–	٤٦–	٥٠–	٥٤–	٥٨–
عدد المصابيح	٥	١٠	٢٠	٣٧	٥٧	٣٦	١٩	١٠	٦

أحسب الوسط الحسابي والمنوال مقرباً لأقرب أسبوع .

(٤) الجدول التالي يوضح فئات أعمار ٢٥٠ شخصاً يعملون في أحد الشركات .

فئة العمر	٢٥-	٢٨-	٣١-	٣٤-	٣٧-	٤٠-	٤٣-	٤٦-	٤٩-
عدد الأشخاص	٢	١٣	٢٢	٣٩	٧٥	٤٧	٢٧	١٨	٧

أحسب المنوال مقرباً لأقرب سنة .

(٥) جد المنوال ، الوسط الحسابي ، الوسيط ، الربعين الأدنى والأعلى من الجدول التكراري التالي :

فئات	٢٥-	٣٥-	٤٥-	٥٥-	٦٥-	٧٥-	٨٥-	٩٥-
تكرارات	٥	٩	١١	٣٥	١٦	١٢	٩	٣

(٦) أحسب المنوال في كل من الجداول التكرارية التالية :

(أ)

فئات	١٣-	٢٠-	٢٧-	٣٤-	٤١-	٤٨-
تكرارات	٦	١٥	٤٠	٤٩	٢٨	١٢

(ب)

فئات	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-	٣٠-	٣٤-	٣٨-
تكرارات	٢	٨	١٢	١٨	٩	٨	٣

(جـ)

فئات	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-	٣٠-	٣٤-
تكرارات	٢	٦	١١	١٨	١٣	٧	٣

(د)

فئات	٢٠-	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	٥٥-
تكرارات	٣	٩	١٣	١٦	٢٠	١٥	١٣	٨

✓ **(٥– ٦) التشتت :**

درسنا في الفصل السابق كيفية الحصول على المتوسط باعتباره القيمة النموذجية التى تمثل مجموعة البيانات وتصلح لوصفها ، ولكن المتوسط وحده لايكفى لإعطاء فكرة دقيقة عن مجموعة البيانات وكيفية توزيعها ، لأن كل مجتمع نبحثه يتكون من مجموعة مفردات مختلفة بعضها عن بعض وهذا الاختلاف بين مفردات المجتمع الواحد نسميه التشتت ، ودراسة تشتت مفردات المجتمع يعطينا فكرة عن العلاقات التى تربط بينها ؛ لأن التشتت إذا كان مقداره صغيراً فإنه يدل على أن المفردات متقاربة من بعضها أو متجانسة وما يسرى على أي واحدة منها خصوصاً المتوسطة يكاد يسري على الجميع بدون خطأ كبير .

أما إذا كان التشتت كبيراً فهو دليل على وجود تفاوت واختلاف بين المفردات ويتعذر إصدار حكم عام على هذه المفردات بثقة عالية .

وما يهمنا من دراسة التشتت هو دراسة مقاييس التشتت وهناك عدة مقاييس له نذكر منها المدى والمدى الربيعي ، والانحراف المتوسط ، والإنحراف المعياري .

المدى :

يعرف المدى أو أحياناً المدى المطلق بأنه الفرق بين أكبر مفردة وأصغر مفردة في المجموعة الإحصائية وهو سهل في حسابه إلا أنه أقل مقاييس التشتت دقة وقد تكون قيمته مضللة لأنه يعتمد في قياسه على قيمتين فقط (الصغرى والكبرى) بغض النظر عن كيفية تشتت القيم داخل المجموعة وخصوصاً في حالات وجود مفردات متطرفة أو شاذة في المجموعة مما يجعل المدى كبيراً بدون مبرر . أما طريقة حسابه في حالة الجدول التكرارى فهي بطرح الحد الأدنى للفئة الدنيا من الحد الأعلى للفئة العليا في الجدول التكراري . ويستخدم المدى ببساطته هذه في مجالات هامة كاستخدامه في مراقبة جودة الانتاج وأحوال الطقس .

الإنحراف الربيعي : (او نصف المدى الربيعي)

نظراً لأن أهم عيوب المدى هو تأثره بالقيم المتطرفة ، فقد اقترح إهمال القيم المتطرفة باستبعادها وأخذ الفرق بين الربيعين الأعلى والأدنى أي المدى الربيعى أو نحصل على نصف المدى الربيعي ويعرف (بالأنحراف الربيعي) كمقياس آخر للتشتت أدق وأكثر استقراراً من مجرد المدى بين المفردتين الكبرى والصغرى .

مثال (١) :

الدرجات التالية حصل عليها طالب في تسع مواد جلس لامتحانها

٧٥ ، ٨٢ ، ٧٤ ، ٥٦ ، ٦٥ ، ٧١ ، ٩٣ ، ٥٨ ، ٨٣

احسب المدى والانحراف الربيعي .

الحل :

المدى = أكبر مفردة – أصغر مفردة

= ٩٣ – ٥٦ = ٣٧

ترتب المفردات تصاعدياً

٥٦ ، ٥٨ ، ٦٥ ، ٧١ ، ٧٤ ، ٧٥ ، ٨٢ ، ٨٣ ، ٩٣

ترتيب الوسيط = $\frac{٩ + ١}{٢}$ = ٥

ترتيب الربيع الأدنى = $\frac{٥ + ١}{٢}$ = ٣

∴ الربيع الأدنى $ر_١$ = ٦٥

الربيع الأعلى يتوسط الخمسة مفردات الأخيرة والتي تبدأ بالوسيط .

∴ ترتيب الربيع الأعلى هو الثالث من الوسيط أو الثالث قبل الأخير

∴ الربيع الأعلى $ر_٢$ = ٨٢

المدى الربيعي = ٨٢ – ٦٥ = ١٧

الانحراف الربيعي = $\frac{١}{٢}$ × ١٧ = ٨,٥

الانحراف المتوسط :

يعرف الانحراف المتوسط بأنه متوسط بعد المفردات عن وسطها الحسابى . وإيجاد الانحراف المتوسط يعتمد على إيجاد بُعد كل مفردة من المفردات عن وسطها الحسابي ، ونسبة لأن مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابى يساوى الصفر فإننا نأخذ القيمة المطلقة لهذه الانحرافات (أي بدون الاشارة الجبرية)

ورياضياً يمكن تعريف الانحراف المتوسط بالمعادلة التالية :

$$\text{الانحراف المتوسط} = \sum_{ر=١}^{ن} \frac{|س_ر - \bar{س}|}{ن}$$

حيث $\bar{س}$ هو الوسط الحسابي ، ن عدد المفردات إذن لإيجاد الانحراف المتوسط لمجموعة من المفردات فإننا نتبع الخطوات التالية :

١- إيجاد الوسط الحسابـــي للمجموعـــة $\bar{س}$.
٢- إيجاد إنحراف كل مفردة عن الوسط الحسابى $س_ر - \bar{س}$
٣- أخذ القيمة المطلقة لهذه الانحرافات $|س_ر - \bar{س}|$
٤- ايجاد الوسط الحسابي للقيم المطلقة للانحرافات

$$\frac{\sum |س_ر - س|}{ن}$$

مثال (٢) :

أحسب الانحراف المتوسط للدرجات في المثال (١)

الحل :

$$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{٧٥ + ٨٢ + ٧٤ + ٥٦ + ٦٥ + ٧١ + ٩٣ + ٥٨ + ٨٣}{٩}$$

$$= \frac{٦٥٧}{٩} = ٧٣$$

المفردة س	ح = س – س = س – ٧٣	| س – س |
٧٥	٢	٢
٨٢	٩	٩
٧٤	١	١
٥٦	١٧-	١٧
٦٥	٨-	٨
٧١	٢-	٢
٩٣	٢٠	٢٠
٥٨	١٥-	١٥
٨٣	١٠	١٠
المجموع		٨٤

الانحراف المتوسط = $\frac{\sum |س_ر - \bar{س}|}{ن} = \frac{٨٤}{٩} = ٩,٣$

الانحراف المعياري :

وهو من اشهر مقاييس التشتت وأكثرها استخداماً وهو عبارة عن الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مربعات انحراف المفردات عن الوسط الحسابي . ويرمز له بالرمز ع

ورياضياً : $ع = \sqrt{\frac{\sum (س - \bar{س})^{٢}}{ن}}$

وقد لجأنا هذه المرة لتفادي مشكلة الاشارة في الإنحرافات بالتربيع بدلاً عن أخذ القيمة المطلقة في الإنحراف المتوسط . ويعود السبب إلى أخذ الجذر التربيعي إلى أننا نريد أن نرجع إلى الوحدات الأصلية وذلك ليكون هذا المقياس للتشتت بنفس الوحدات المقاسة بها المفردات في المجموعة الإحصائية المراد بحثها .

أما مربع الانحراف المعيارى $ع^{٢} = \frac{\sum (س - \bar{س})^{٢}}{ن}$
فيسمى التباين .

تلاحظ مما سبق أنه لإيجاد الانحراف المعياري لمجموعة من القيم نتبع الخطوات التالية :

١- نوجد الوسط الحسابي للقيم في المجموعة
٢- نحسب انحرافات القيم عن الوسط الحسابي .
٣- نربع الانحرافات
٤- نجمع هذه المربعات ونقسم المجموع على عدد القيم لنحصل على متوسط مربعات الانحرافات وهو ما يعرف بالتباين .
٥- نحسب الجذر التربيعي لمتوسط مربعات الانحرافات يكون هو الإنحراف المعياري المطلوب .

مثال (٣) :

جد الانحراف المعياري لدرجات الطالب في المثال السابق

الحل :

الوسط الحسابي للمفردات من المثال السابق = ٧٣

المفردة س	ح = س – س̄ = س – ٧٣	(س – س̄)^{٢}
٧٥	٢	٤
٨٢	٩	٨١
٧٤	١	١
٥٦	–١٧	٢٨٩
٦٥	–٨	٦٤
٧١	–٢	٤
٩٣	٢٠	٤٠٠
٥٨	–١٥	٢٢٥
٨٣	١٠	١٠٠
مج (س – س̄)^{٢}		١١٦٨

$$ع^{٢} = \frac{١١٦٨}{٩} = ١٢٩,٧ \simeq ١٢٩,٨$$

$$\therefore ع = \sqrt{١٢٩,٨} = ١١,٣٩$$

إن العلاقة $ع = \sqrt{\frac{\sum (س - \bar{س})^{٢}}{ن}}$

هى العلاقة الأساسية لتعريف الإنحراف المعياري ولكننا إذا استخدمنا خواص رمز المجموع $\sum$ نستطيع أن نتوصل إلى صيغة أخرى للانحراف المعيارى وذلك باستخدام مربعات مفردات المجموعة والوسط الحسابى للمفردات وهذه العلاقة هى :

$$ع = \sqrt{\frac{\sum س^{٢}}{ن} - \bar{س}^{٢}}$$

وهذه الصيغة تؤدى إلى نفس النتيجة ولكن عبء العمليات الحسابية يختلف ولكن يمكن تخفيف العمليات الحسابية أكثر بطرح قيمة فرضية (و) من مفردات المجموعة ومن وسطها الحسابى لأن الانحراف المعيارى لايتأثر بهذه الازاحة وتكون الصيغة للانحراف المعياري حينئذٍ على الصورة :

$$ع = \sqrt{\frac{\sum (س - و)^{٢}}{ن} - (\bar{س} - و)^{٢}}$$ وهي ما تعرف بطريقة الازاحة

مثال (٤) :

مستخدماً طريقة الازاحة جد الانحراف المعياري لدرجات التلاميذ في المثال السابق .

الحل :

بازاحة المفردات إلى اليمين بـــ ٧٤ .

المفردة س	س − ٧٤	(س − ٧٤)^{٢}
٧٥	١	١
٨٢	٨	٦٤
٧٤	صفر	صفر
٥٦	−١٨	٣٢٤
٦٥	−٩	٨١
٧١	−٣	٩
٩٣	١٩	٣٦١
٥٨	−١٦	٢٥٦
٨٣	٩	٨١
المجموع		١١٧٧

من العلاقة

$$ع = \sqrt{\frac{\sum (س - و)^2}{ن} - (\bar{س} - و)^2}$$

$$ع = \sqrt{\frac{١١٧٧}{٩} - (٧٣ - ٧٤)^2}$$

$$ع = \sqrt{١٣٠{,}٨ - ١} = \sqrt{١٢٩{,}٨} = ١١{,}٣٩$$

وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها سابقاً

ويمكن ايجاد الانحراف عن طريق الالات الحاسبة المبرمجة أو الحاسوب . وذلك بادخال المفردات فقط والضغط على زر معين يعطي الانحراف المعياري .

الانحراف المعيارى للتوزيع التكراري :

إذا كانت البيانات في توزيع تكرارى ، فإن كل قيمة من قيم س في الجدول تتكرر عدداً من المرات ويتولد عن ذلك عدد مساوٍ له من الإنحرافات ومربعات الانحرافات ولحساب الإنحراف المعياري من جدول التوزيع التكراري نتبع الخطوات التالية :

(١) نوجد الوسط الحسابي س بالطريقة التى عرفناها سابقاً .

(٢) نحسب الانحرافات ح عن هذا الوسط ونكتبها في عمود منفصل . تحت عنوان $= س - \bar{س}$

(٣) تربيع ح في كل سطر ونضع الناتج في عمود ملاصق لهذا تحت عنوان $ح^2$.

(٤) نضرب أرقام هذا العمود $ح^2$ في أرقام عمود التكرارات ك كل في نظيره على نفس السطر ونكتب الناتج في نفس السطر في خانة جديدة بعنوان $ح^2$ ك وستكون هذه النواتج كلها موجبة .

(٥) نجمع العمود $ح^2$ ك فنحصل على مجموع مربعات الانحرافات

(٦) نوجد الإنحراف المعياري مستخدمين العلاقة

$$ع = \sqrt{\frac{\sum ح^{2} ك}{\sum ك}}$$

ويمكن استخدام طريقة أخرى للتعبير عن ع وهي

$$ع = \sqrt{\frac{\sum ك س^{2}}{\sum ك} - \bar{س}^{2}}$$

وإذا استخدمنا طريقة الازاحة بـــ و إلى اليمين تصبح العلاقة في الصورة :

$$ع = \sqrt{\frac{\sum ك (س - و)^{2}}{\sum ك} - (\bar{س} - و)^{2}}$$

مثال (٥) :

الجدول التالى يمثل المرتب الشهري بالآف الدينارات لمجموعة مكونة من ٥٠ عاملاً في أحدى الشركات :

المرتب الشهرى	١٢	١٥	١٧	٢١	٢٢	٢٥	٣٦	المجموع
عدد العمال	٣	٤	١١	١٤	٩	٥	٤	٥٠

جد الانحراف المعياري لأجور هؤلاء العاملين .

الحل :

المرتب س	عدد العمال ك	ك س	ح = س – س	$ح^{2}$	ك $ح^{2}$
١٢	٣	٣٦	٨,٨٨-	٧٨,٨٥	٢٣٦,٥٥
١٥	٤	٦٠	٥,٨٨-	٣٤,٥٧	١٣٨,٢٨
١٧	١١	١٨٧	٣,٨٨-	١٥,٠٥	١٦٥,٥٥
٢١	١٤	٢٩٤	٠,١٢	٠,٠١٤	٠,١٩٦
٢٢	٩	١٩٨	١,١٢	١,٢٥٤	١١,٢٨٦
٢٥	٥	١٢٥	٤,١٢	١٦,٩٧	٨٤,٨٥
٣٦	٤	١٤٤	١٥,١٢	٢٢٨,٦١	٩١٤,٤٤
المجموع	٥٠	١٠٤٤			١٥٥١,١٥٢

$$س = \frac{\sum ك\ س}{\sum ك} = \frac{١٠٤٤}{٥٠} = ٢٠,٨٨$$

$$\therefore ع = \sqrt{\frac{\sum ك\ ح^{٢}}{\sum ك}} = \sqrt{\frac{١٥٥١,١٥٢}{٥٠}} = \sqrt{٣١,٠٢٣}$$

$$\simeq \underline{\underline{٥,٥٧}}$$

الانحراف المعياري من الجدول التكرارى ذى الفئات :

طريقة حساب الانحراف المعياري من الجدول التكراري ذى الفئات لاتختلف كثيراً عن طريقة حسابه من جدول التوزيع التكرارى والاختلاف الوحيد هو أننا نوجد مراكز الفئات ونعتبر أن جميع القياسات التي تنتمي إلى فئة مساوية لمركز هذه الفئة . ولتخفيف العمليات الحسابية نلجأ أحياناً إلى إختيار وسط فرضي ويكون أحد مراكز الفئات ويستحسن أن يكون هو مركز الفئة ذات التكرارات الكبيرة . ثم نحسب الانحرافات ح عن هذا الوسط ثم نوجد $ح^{٢}ك$ كما فعلنا سابقاً وهو يساوي $\sum ك\ (س - و)^{٢}$ في العلاقة التى مرت بنا سابقاً والمثال التالى يوضح ذلك .

مثال (٦) :

في سجل المواليد بأحد المستشفيات كانت أعمار أمهات المواليد اللائى وضعن بالمستشفى في أحد الشهور كما يلي :

الفئات	٢٠–	٢٥–	٣٠–	٣٥–	٤٠–	٤٥–	المجموع
التكرارات	١٥	٢٨	٤٦	٣٥	٢٢	٤	١٥٠

أحسب الانحراف المعياري لأعمار الأمهات في هذا الجدول

الحل :

نختارمقداراً للازاحة وليكن هو مركز الفئة ٣٠ – أي ٣٢,٥

فئات العمر	مركز الفئة س	التكرار ك	الانحراف ح = س − ٣٢,٥	ح × ك	ح² ك
٢٠−	٢٢,٥	١٥	−١٠	−١٥٠	١٥٠٠
٢٥−	٢٧,٥	٢٨	−٥	−١٤٠	٧٠٠
٣٠−	٣٢,٥	٤٦	صفر	صفر	صفر
٣٥−	٣٧,٥	٣٥	٥	١٧٥	٨٧٥
٤٠−	٤٢,٥	٢٢	١٠	٢٢٠	٢٢٠٠
٤٥	٤٧,٥	٤	١٥	٦٠	٩٠٠
المجموع		١٥٠	١٥	١٦٥	٦١٧٥

$$\bar{\text{س}} = ٣٢,٥ + \frac{١٦٥}{١٥٠}$$

$$\therefore \bar{\text{س}} - \text{و} = \frac{١٦٥}{١٥٠}$$

$$\therefore \text{ع}^{٢} = \frac{\sum \text{ح}^{٢}\text{ك}}{\sum \text{ك}} - (\bar{\text{س}} - \text{و})^{٢}$$

$$= \frac{٦١٧٥}{١٥٠} - \left(\frac{١٦٥}{١٥٠}\right)^{٢}$$

$$= ٤١,١٧ - ١,٢١ = ٣٩,٩٦$$

$$\therefore \text{ع} = \sqrt{٣٩,٩٦} \simeq ٦,٣$$

تمرين (٥– ٥)

(١) جد المدى المطلق ، المنوال ، الوسط الحسابي ، الوسيط ، الانحراف الربيعى ، الانحراف المتوسط والانحراف المعياري لمجموعة القيم التالية :
١٢ ، ١٧ ، ١٣ ، ١٥ ، ١٧ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٣ ، ١٧ ، ١٥ ، ٢١ ، ٢٣ ، ٢٧ ، ١٧ ، ١٩ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٦ ، ١٤

(٢) جد المدى المطلق ، المنوال ، الوسط الحسابي ، الوسيط ، الانحراف الربيعي ، الانحراف المتوسط والانحراف المعياري من الجدول أدناه :

فئات	٢٥–	٣٥–	٤٥–	٥٥–	٦٥–	٧٥–	٨٥–	٩٥–
تكرارات	٥	٩	١١	٣٥	١٦	١٢	٩	٣

(٣) جد المدى المطلق ، الانحراف المتوسط ، الانحراف الربيعي والانحراف المعياري من الجدول أدناه :

فئات	١٢–	١٦–	٢٠–	٢٤–	٢٨–
تكرارات	٧	٩	١٥	٦	٣

(٥) الجدول التكراري التالي يوضح توزيع أعمار ٤٠ شخصاً

فئات	١٠–	١٤–	١٨–	٢٢–	٢٦–	المجمع
تكرارات	٣	٧	١٦	١٠	٤	٤٠

جد المدى المطلق ، المنوال ، الوسط الحسابي ، الوسيط ، الانحراف الربيعى ، الانحراف المتوسط والانحراف المعياري .

(٦) الجدول إدناه يبين التوزيع التكراري لدرجات ١٢٠ تلميذاً في امتحان العلوم ، جد :
الوسط الحسابى ، المدى المطلق ، المنوال ، الوسيط ، والانحراف المعياري الانحراف الربيعي ، الانحراف المتوسط .

فئات	٣٠–	٤٠–	٥٠–	٦٠–	٧٠–	٨٠–	٩٠–	المجموع
تكرارات	١	٣	١١	٢١	٤٣	٣٢	٩	١٢٠

(٧) جلس فصلان من الطلاب لامتحان واحد ، الفصل الأول به ٤٥ والثاني به ٥٥ طالباً . إذا كان الوسط الحسابي للفصل الأول ٦٤ درجة والانحراف المعياري ٨ وكان الوسط الحسابي للثاني ٥٢ درجة والانحراف المعياري ١٠ ، جد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لدرجات الفصلين إذا دمجا معاً .

(٨) إذا كان الوسط الحسابي لأربعة أعداد $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ، $س_{٤}$ يساوي ٠,٩ والانحراف المعيارى لهذه الأعداد ٠,٣ أثبت أن :

(١) $س_{١} + س_{٢} + س_{٣} + س_{٤} = ٣,٦$

(٢) $س_{١}^{٢} + س_{٢}^{٢} + س_{٣}^{٢} + س_{٤}^{٢} = ٣,٦$

(٩) الجدول التالي يوضح درجات ٢٠٠ طالب في إمتحان الإحصاء بإحدى الكليات .

فئات	٢٥-	٣٠-	٣٥-	٤٠-	٤٥-	٥٠-	٥٥-	٦٠-	٦٥-	٧٠-
تكرارات	١	١	٤	١٣	٤٠	٦٥	٥٢	١٨	٥	١

أحسب كلاً من الوسط الحسابي والوسيط والمنوال والإنحراف المعياري لدرجات الطلاب .

(١٠) مستخدماً تعريف الإنحراف المعياري $ع = \sqrt{\frac{\sum (س - \bar{س})^{٢}}{\sum ك}}$

أثبت أن :

$$ع = \sqrt{\frac{\sum ك\, س^{٢}}{\sum ك} - \bar{س}^{٢}} = \sqrt{\frac{\sum ك(س - و)^{٢}}{\sum ك} - (\bar{س} - و)^{٢}}$$

حيث و مقدار الازاحة